

Cálculo de las ecuaciones del movimiento parabólico usando Tracker

Gladys Patricia Abdel Rahim Garzón & Manuel Antonio Moreno Villate

Facultad Tecnológica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
garahimg@udistrital.edu.co, maamorenov@correo.udistrital.edu.co

Resumen— El objetivo de la investigación fue mostrar la importancia que tiene el uso del software Tracker para el análisis del movimiento parabólico. En la primera etapa, en clase, se explicó la cinemática del movimiento parabólico y en la segunda etapa, los estudiantes construyeron una catapulta, se familiarizaron con la interfaz del programa, grabaron un video y analizaron el movimiento; utilizando las herramientas que brinda el programa Tracker. Fueron halladas las ecuaciones de movimiento, la altura máxima (y_f), el tiempo de vuelo (t_v) y el alcance máximo (x_f), para los ángulos 15° , 30° , 45° , 60° y 75° . Posteriormente, fueron comparados los cálculos teóricos con los datos experimentales de y_f , t_v y x_f ; y se obtuvo errores del $\sim 3,9\%$, $\sim 0,12\%$ y $\sim 0,67\%$ respectivamente. En el proceso se evidenció la importancia de realizar la primera etapa antes de usar el Tracker.

Palabras Clave— Catapulta de torsión, Tracker, movimiento parabólico, movimiento en 2D, altura máxima, alcance máximo, tiempo de vuelo.

Recibido: 31 de mayo de 2021. Revisado: 21 de octubre de 2021. Aceptado: 2 de diciembre de 2021.

Calculation of the equations of parabolic motion using Tracker

Abstract— The objective of this research is showing the importance of the use of Tracker software for the analysis of the parabolic movement. In the first stage was explained in class the kinematics of the parabolic motion and at the second stage the students build the catapult, they get acquainted with the program interface, record the video and make the analysis of the movement using the tools provided by the Tracker program. The equations of motion were found, the maximum height (y_f), flight time (t_v) and the maximum reach (x_f) for the angles of: 15° , 30° , 45° , 60° and 75° . Theoretical calculations were compared with the experimental data of: y_f , t_v and x_f where it was obtained mistakes of the $\sim 3,9\%$, $\sim 0,12\%$ and $\sim 0,67\%$, respectively. Also, the importance of carrying out the first stage before using the Tracker was evidenced in the process.

Keywords— Torsion catapult, tracker, parabolic movement, 2D movement, maximum height, maximum range, flight time.

1 Introducción

Ante la dificultad de realizar prácticas de laboratorio presenciales se ha fortalecido la física computacional, que de acuerdo a M. Domínguez [1] se ha desarrollado desde los años setenta y hasta ahora se presentaba como una opción para ser utilizada a modo de herramienta para analizar datos matemáticos de los fenómenos físicos. Actualmente se hace necesario el uso de este recurso, no solo para la comprensión de los conceptos físicos, sino para que los estudiantes desarrollen competencias (hábitos, destrezas y habilidades mentales analíticas) para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física [1].

Al realizar un video casero, en el que se hace rodar una pelota; o bajar un video de YouTube en el que se ve un atleta corriendo los 100 metros planos, o tomar una simulación ya elaborada de PhET de la Universidad de Colorado [2], hace de

Tracker una herramienta computacional muy útil ya que podemos apreciar la cinemática, dinámica y energía de dichos movimientos.

Cabe anotar que al revisar la bibliografía actual relacionada con el uso del Tracker, se encontró que en la mayoría de estas consultas no existen procedimientos matemáticos; sino que solo se enfocan en las metodologías y resultados bajo modalidades cualitativas en las prácticas docentes realizadas con los estudiantes [1], [3], [4] y [5].

El Tracker es un software libre usado para analizar videos y construir modelos dinámicos en el ambiente Java, creado en el marco del proyecto Open Source Physics (OSP) [6].

Por tal motivo, este trabajo presenta no solo una metodología aplicada; sino que incluye el paso a paso de todos los procedimientos matemáticos para el desarrollo de la práctica en cuestión. Dado que estos modelos físicos-matemáticos son fundamentales en la aplicación de conceptos posteriores a los cursos de ingeniería es fundamental desarrollarlos para temas entre otros, como: electromagnetismo; cuando se estudia el movimiento de una carga eléctrica dentro de un campo electromagnético; en mecánica de fluidos: cuando es necesario determinar la velocidad de salida del flujo de agua o aire que describe una trayectoria parabólica [7].

Cabe destacar el aporte que tiene este trabajo para los estudiantes de los primeros semestres de ingeniería, ya que por experiencia se sabe que el estudio físico-matemático del movimiento parabólico es complejo para la comprensión de los estudiantes, debido a que este fenómeno es la suma del movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U) y del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (M.R.U.A) [8].

Por lo anterior, el presente artículo pretende mostrar el estudio del movimiento parabólico para determinar las ecuaciones de movimiento parabólico y a partir de éstas calcular: la velocidad inicial (v_i) con que sale la masa en el punto $(0, y_i)$, la altura máxima (y_f) donde $(0, v_y)$, el tiempo de vuelo (t_v) desde el punto de lanzamiento hasta el punto $(x_f, -y_f)$ y el alcance máximo (x_f) desde el punto $(0, y_i)$ hasta el punto $(x_f, -y_f)$.

Lo anterior se realizará para los ángulos que se tomaron entre la mesa y la parte convexa de la cuchara de: 15° , 30° , 45° , 60° y 75° (Fig. 1).

Se usó Tracker para obtener las condiciones iniciales del problema en seis (6) puntos que se consideran fundamentales, tales como: la posición inicial $(0, y_i)$, la posición final $(x_f, -y_f)$, el ángulo de tiro parabólico (α_i) en el punto $(0, y_i)$, el tiempo inicial (t_i) en el punto $(0, y_i)$, el tiempo de vuelo (t_v)

en el punto $(x_f, -y_f)$ y el tiempo en el momento que cambia de dirección (t_s) en el punto $(0, v_y)$.

2 Catapulta de torsión

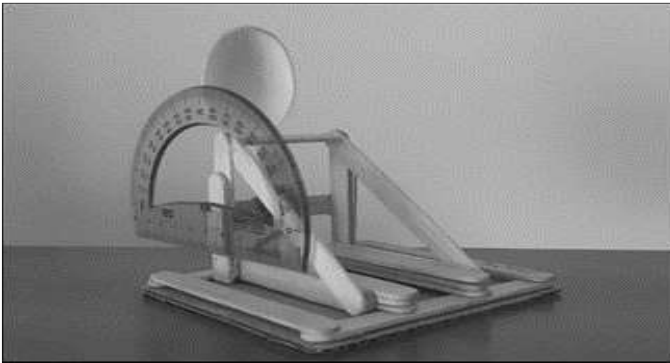


Figura 1. Primer prototipo de la catapulta con cuchara plástica.
Fuente: Los autores.

La Fig. 1 muestra el primer prototipo de la catapulta de torsión construida. Para su elaboración se utilizó 4 palos para la base, 6 palos que componían los soportes de las estructuras triangulares, 6 palos para las columnas triangulares y 4 palos que funcionaban como separadores que brindaron rigidez a la catapulta; en total fueron utilizados 20 palos de madera, una cuchara plástica, tres ligas de caucho que permitieron la capacidad de torsión de la cuchara y un transportador.

2.1 Materiales

Como se muestra en la Fig. 2 que corresponde al segundo prototipo de catapulta, se cambió la cuchara por una tapa plástica debido a que ésta no permitía la movilidad de la masa mientras se calibraba el ángulo de tiro. Además, se elaboró una estructura a base de cartón y palos de madera para fijar la catapulta.



Figura 2. Segundo prototipo de la catapulta con una cuchara hecha de una tapa de botella y un palo de madera.
Fuente: Los autores.

Después de una serie de prácticas con la catapulta y el simulador, se determinó que para el disparo en los ángulos que estuvieran cerca del ángulo de 90° ; se requería de una cuchara de menor profundidad, para que el programa de simulación diferenciara la cuchara por separado de la masa (se utilizó una tapa plástica cortada a la mitad) (Fig. 3).

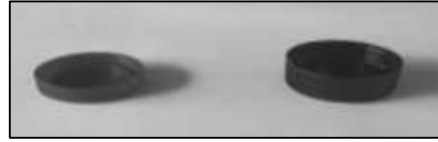


Figura 3. (Izquierda) tapa cortada a la mitad para ángulos cerca del ángulo recto 90° (derecha) tapa completa para ángulos agudos.
Fuente: Los autores.

La Fig. 4 muestra la canica de 16 mm de diámetro utilizada en el experimento, la cual es de color negro con el fin de que Tracker la detectara. Como trabajo experiencial, se hace necesario mantener la uniformidad de la masa, dado que su cambio puede originar una alteración significativa en el cálculo del alcance máximo.



Figura 4. Canica de 16 mm de diámetro, negra brillante usada en todo el experimento.
Fuente: Los autores.

2.2 La masa



Figura 5. Masas usadas para demostrar que su forma, tamaño, densidad afecta la trayectoria del movimiento parabólico.
Fuente: Los autores.

Tabla 1
Descripción de la masa con su diámetro y el alcance máximo que se obtuvo a partir de varios lanzamientos con un ángulo de 15° .

Masa	Descripción	\varnothing [mm]	x_f [m]
M1	Frijol	12	3,5
M2	Bola de cinta	14	3,05
M3	Bola de papel	26	2,75
M_{exp}	Canica pequeña	16	1,692
M4	Canica grande	22	1,03
M5	Pelota de goma	41	0,71

Fuente: Los autores.

Para corroborar que la resistencia del aire afecta el cálculo del alcance máximo (x_f) se realizó la práctica con diferentes masas (véase la Fig. 5). La práctica se realizó únicamente con el ángulo de 15° entre la mesa y la cuchara. La Tabla 1 muestra los datos de x_f obtenidos con diferentes masas, donde se observa que entre mayor es el diámetro (\varnothing) de la esfera, menor es el x_f . Con este resultado se comprobó nuestras predicciones y se decidió mantener la masa fija para realizar el experimento.

2.3 Escenario de prueba

Las condiciones de efectividad para usar Tracker derivan en gran parte de la calidad del video y para grabarlo hay que tener presente una serie de características que se observan en la Fig. 6, las cuales son:

1. El plano cartesiano: permite ubicar la trayectoria de la partícula en los cuadrantes, de acuerdo al movimiento observado.
2. La vara de calibración: permite que el programa de simulación tome una medida estándar y a partir de esa medida puede derivar la escala a la cual se está realizando el experimento.
3. El transportador: para el movimiento en dos dimensiones, permite conocer el ángulo de tiro parabólico.
4. Las gráficas: una vez obtenida la trayectoria total de la partícula, el programa puede elaborar las gráficas de posición y velocidad como funciones del tiempo.

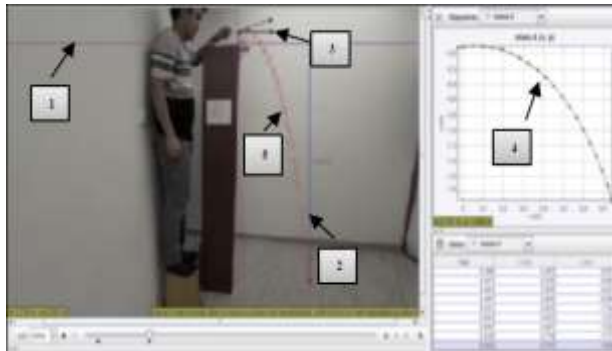


Figura 6. Ejemplo de simulación Tracker, 1 indica el eje de referencia, 2 trayectorias, 3 transportador, 4 gráfica y 5 trayectoria. Fuente: Los autores.

3 Resultados experimentales obtenidos con Tracker



Figura 7. Escenario de prueba para lanzamiento de tiro parabólico Fuente: Los autores.

3.1 Alcance máximo (x_f)

En la Fig. 7 se muestra el montaje experimental donde se ubicó la catapulta de torsión, para medir el promedio del alcance máximo (x_f) de los ángulos entre la mesa y la cuchara de 15^0 , 30^0 , 45^0 , 60^0 y 75^0 , que se indican en la Tabla 2.

Los valores promedios de x_f fueron utilizados para hallar los valores teóricos de la velocidad inicial (v_i) en el punto $(0, y_i)$.

Tabla 2

El ángulo α con el que sale la masa en el punto $(0, y_i)$ m, valor obtenido con Tracker.

Ángulos entre la mesa y la cuchara	Alcance máximo, x_f [m]				
	Punto en el plano cartesiano ($x_f, -y_f$)				
$\alpha = 15^\circ$	30°	45°	60°	75°	
Ángulos de tiro parabólico en el punto $(0, y_i)$	$\theta_{tiro} = 11.9^\circ$	15.8°	8.1°	15.5°	0°
1	1,65	1,54	1,21	0,66	0,48
2	1,65	1,54	1,24	0,66	0,49
3	1,68	1,54	1,27	0,70	0,51
4	1,72	1,68	1,35	0,71	0,52
5	1,76	1,68	1,35	0,70	0,51
Promedio	1,692	1,596	1,284	0,69	0,502

Fuente: Los autores.

3.2 Posiciones iniciales y finales, tiempos y ángulos

La Tabla 3 muestra los datos iniciales y finales que se obtuvieron con Tracker. En la primera columna se indican los ángulos iniciales entre la mesa y la cuchara; en la segunda y tercera columna se indican los datos de las posiciones horizontales y verticales iniciales; la cuarta columna muestra los promedios de las posiciones horizontales finales; la quinta columna indica los ángulos con que sale la masa en el punto $(0, y_i)$ que corresponden a los ángulos de tiro parabólico y la última columna indica los tiempos que recorre la masa desde el ángulo de la primera columna hasta la posición $(\approx 0, y_i)$ Fig. 8.

Tabla 3

Ángulos tomados entre la mesa y la cuchara, posición inicial (x_i, y_i) en el punto $(0, y_i)$, posición final horizontal (x_f) de la Tabla 2, ángulo de tiro parabólico en el punto $(0, y_i)$ y tiempo inicial (t_i), desde donde fue lanzado hasta el punto $(0, y_i)$ tomado del Tracker.

Ángulo entre la mesa y la cuchara	x_i [m]	y_i [m]	x_f [m]	Ángulos de tiro (θ_{tiro}) parabólico	t_i [s]
$\alpha = 15^\circ$	0,00109 ≈ 0	0,135	1,692	$11,9^\circ$	0,066
$\alpha = 30^\circ$	0,0007188 ≈ 0	0,102	1,596	$15,8^\circ$	0,033
$\alpha = 45^\circ$	0,001366 ≈ 0	0,101	1,284	$8,1^\circ$	0,033
$\alpha = 60^\circ$	0,0006665 ≈ 0	0,09153	0,69	$15,5^\circ$	0,033
$\alpha = 75^\circ$	0,0006149 ≈ 0	0,07748	0,502	0°	0,033

Fuente: Los autores.

3.3 Cálculo de las ecuaciones de movimiento, tiempo de vuelo, velocidad inicial, altura máxima y alcance máximo

Fueron calculadas las ecuaciones de movimiento parabólico, o sea las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo; así el vector posición es:

$$\vec{r} = [x_i + (v_i \cos \theta_{tiro})t]\hat{i} + [y_i + (v_i \sin \theta_{tiro})t - 4,9t^2]\hat{j} \quad (1)$$

Donde el primer término es una función lineal que depende del tiempo en dirección \hat{i} , que corresponde al M.R.U. mientras que el segundo término corresponde a una función cuadrática cóncava hacia abajo en dirección \hat{j} , que describe el M.R.U.A. Derivando la ecuación (1) con respecto al tiempo obtenemos el vector velocidad en función del tiempo.

$$\vec{v} = (v_i \cos \theta_{tiro})\hat{i} + [v_i \sin \theta_{tiro} - 9,8t]\hat{j} \quad (2)$$

Donde la velocidad en la dirección \hat{i} es constante; mientras que la velocidad vertical en la dirección \hat{j} , depende del tiempo.

Derivando la ecuación (2) con respecto al tiempo, se obtiene la aceleración vertical, en la dirección \hat{j} .

$$\vec{a} = (-9,8\hat{j}) \frac{m}{s^2} \quad (3)$$

Remplazado el ángulo de tiro parabólico $\theta_{tiro} = 11,9^\circ$ de la Tabla 3 en la ecuación (1), se obtuvo la ecuación (4):

$$\vec{r} = [x_i + (v_i \cos 11,9^\circ)t]\hat{i} + [y_i + (v_i \sin 11,9^\circ)t - 4,9t^2]\hat{j} \quad (4)$$

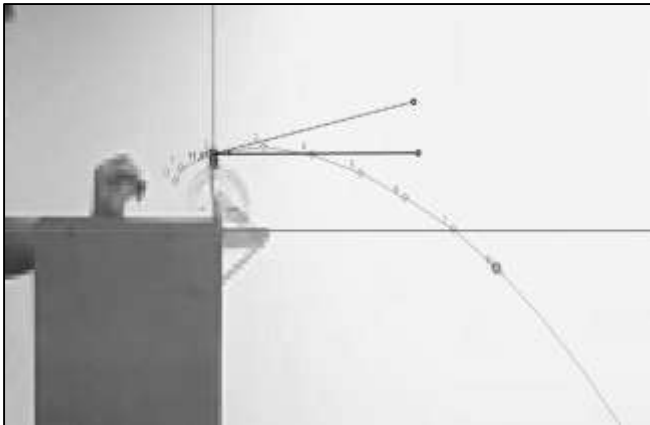


Figura 8. Punto inicial donde se tomó las coordenadas iniciales $(0, y_i)$
Fuente: Los autores.

Para calcular la velocidad inicial que se indica en la ecuación (4), primero se tuvo en cuenta los siguientes datos obtenidos con Tracker que se muestran en la Tabla 3, los cuales son: la posición inicial en el punto de coordenadas cartesianas $(0,00109, 0,135)$ m en $t_i = 0,066$ s, la posición final en el punto de coordenadas $(1,692, -1,91)$ m. para luego calcular el tiempo de vuelo y así determinar la velocidad inicial.

Sustituyendo en la ecuación (4), obtenemos:

$$\vec{r} = [0,00109 + (v_i \cos 11,9^\circ)t]\hat{i} + [0,135 + (v_i \sin 11,9^\circ)t - 4,9t^2]\hat{j} \quad (5)$$

Para determinar el tiempo de vuelo igualamos la ecuación (5) correspondiente a la posición horizontal con 1,695 m:

$$\begin{aligned} 0,00109 + (v_i \cos 11,9^\circ)t_v &= 1,692 \\ -1,692 + (v_i \cos 11,9^\circ)t_v &= 0 \end{aligned}$$

$$t_v = \frac{1,692}{v_i \cos 11,9^\circ} \quad (6)$$

Ahora sustituimos la ecuación (6) en la posición vertical final de la ecuación (5) y se igualó a la altura del mueble sobre la cual estaba la catapulta $(-1,91 \text{ m})$, así:

$$0,135 + (v_i \sin 11,9^\circ)t - 4,9t^2 = -1,91$$

$$0,135 + 1,91 + (v_i \sin 11,9^\circ)t - 4,9t^2 = 0$$

$$4,9t^2 - (v_i \sin 11,9^\circ)t - 2,045 = 0$$

$$4,9 \left(\frac{1,692}{v_i \cos 11,9^\circ} \right)^2 - (v_i \sin 11,9^\circ) \left(\frac{1,692}{v_i \cos 11,9^\circ} \right) - 2,045 = 0$$

$$4,9 \left(\frac{2,86}{0,96v_i^2} \right) - 1,692 \tan 11,9^\circ - 2,045 = 0$$

$$4,9 \left(\frac{2,98}{v_i^2} \right) - 0,36 - 2,045 = 0$$

$$\frac{14,60}{v_i^2} - 2,405 = 0$$

$$\frac{14,60}{v_i^2} = 2,405$$

$$v_i^2 = \frac{14,60}{2,405} = 6,07 \quad (8)$$

$$v_i = \sqrt{6,07} = 2,46 \frac{m}{s}$$

Esta v_i corresponde a la velocidad inicial de la masa, en el punto $(0, y_i)$ Fig. 8. Con este valor obtenemos las componentes rectangulares de la velocidad inicial (v_i) , así:

$$v_{ix} = \left(2,46 \frac{m}{s} \right) \cos 11,9^\circ = 2,41 \frac{m}{s} \quad (9)$$

$$v_{iy} = \left(2,46 \frac{m}{s} \right) \sin 11,9^\circ = 0,51 \frac{m}{s} \quad (10)$$

Con los resultados de las ecuaciones (9) y (10), obtenemos el vector velocidad inicial en el punto $(0, y_i)$ Fig. 8, así:

$$\vec{v}_i = (2,41 \hat{i} + 0,51 \hat{j}) \frac{m}{s} \quad (11)$$

Sustituyendo los datos de (v_{ix}, v_{iy}) ecuaciones (9) y (10), en la ecuación (5), obtenemos la posición en función del tiempo:

$$\vec{r} = [0,00109 + 2,41t]\hat{i} + [0,135 + 0,51t - 4,9t^2]\hat{j} \quad (12)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (12), hallamos la velocidad final horizontal, $v_x = 2,41 \frac{m}{s}$ y la velocidad final vertical, $v_y = (0,51 - 9,8t) \frac{m}{s}$, así:

$$\vec{v} = [2,41\hat{i} + [0,51 - 9,8t]\hat{j}] \frac{m}{s} \quad (13)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (13) obtenemos la aceleración vertical, así:

$$\vec{a} = (-9,8\hat{j}) \frac{m}{s^2} \quad (14)$$

3.3.1 Cálculo del tiempo de vuelo, el alcance máximo y la altura máxima

Logradas las ecuaciones de movimiento (12), (13) y (14) procedemos a calcular el tiempo de vuelo, el alcance máximo y la altura máxima usando los datos suministrados por el Tracker (Tablas 2 y 3). Es importante identificar la posición horizontal

y vertical que se indican en la ecuación (5), para hallar otras variables.

Tabla 4

Ecuaciones de la posición final horizontal y vertical.

Posición final horizontal	Posición final vertical
$x_f = (v_i \cos 11,9^\circ)t$	$y_f = 0,135 + (v_i \sin 11,9^\circ)t - 4,9t^2$

Fuente: Los autores.

Determinamos el tiempo de vuelo usando la ecuación (6) y la distancia horizontal promedio para $\theta_{tiro} = 11,9^\circ$ (Tabla 2), se obtiene:

$$t_v = \frac{1,692 \text{ m}}{v_i \cos 11,9^\circ} = \frac{1,692 \text{ m}}{2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,70 \text{ s} \quad (15)$$

Al comparar este último dato, con el tiempo de vuelo experimental suministrado por Tracker ($t_v = 0,696 \text{ s}$) con su correspondiente posición final horizontal ($x_f = 1,618 \text{ m}$) (Fig. 9) y sustituyendo en la ecuación (6), se obtuvo:

$$t_v = \left[\frac{x_f}{v_i \cos 11,9^\circ} \right] \text{ s} = \frac{1,618 \text{ m}}{2,41 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0,67 \text{ s} \quad (16)$$

El dato suministrado por Tracker es: $t_v = 0,696 \text{ s}$ que al compararlo con el dato obtenido en la ecuación (16), nos presenta un error relativo de:

$$e\% = \left| \frac{0,67 \text{ s} - 0,696 \text{ s}}{0,67 \text{ s}} \right| \times 100\% = 3,9\%$$

Para determinar el x_f usamos la ecuación de posición final horizontal: $x_f = [0,00109 + 2,41t] \text{ m}$, y con el tiempo de vuelo teórico, obtuvimos:

$$x_f = [2,41(0,70)] \text{ m} = 1,69 \text{ m} \quad (17)$$

El dato suministrado por Tracker es: $x_f = 1,692 \text{ m}$ que al compararlo con el dato obtenido en la ecuación (17), muestra un error relativo de:

$$e\% = \left| \frac{1,69 \text{ m} - 1,692 \text{ m}}{1,69 \text{ m}} \right| \times 100\% = 0,12\%$$

Para determinar la altura máxima, primero se determinó el tiempo de subida (t_s), Fig. 9. Luego se igualó la velocidad final vertical (v_y) de la ecuación (13) a cero.

$$v_y = [0,51 - 9,8t] \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0 = [0,51 - 9,8t] \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t_s = \frac{-0,51 \text{ m}}{-9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$t_s = 0,052 \text{ s} \quad (18)$$

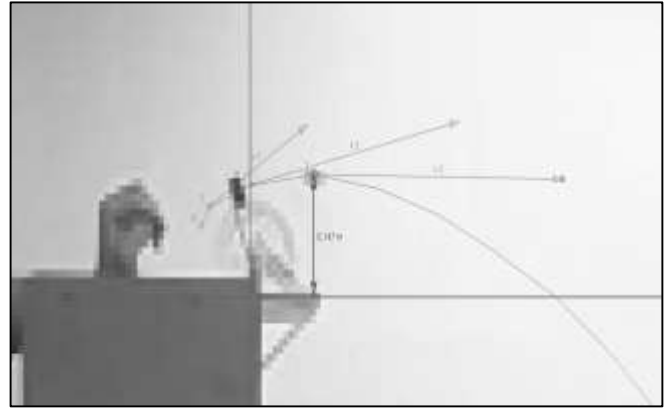


Figura 9. Punto donde la velocidad solo tiene componente en el eje horizontal obtenida con el Tracker.

Fuente: Los autores.

Para calcular la altura máxima se sustituyó el tiempo de subida (t_s) en la ecuación de la posición final vertical, descrita en la ecuación (12).

$$y_f = [0,135 + 0,51t - 4,9t^2] \text{ m} \quad (19)$$

$$y_f = [0,135 + 0,51(0,052) - 4,9(0,002704)] \text{ m}$$

$$y_f = 0,119 \text{ m} + 0,026 \text{ m} - 0,013 \text{ m}$$

$$y_f = 0,148 \text{ m}$$

El dato suministrado por Tracker es: $y_f = 0,147 \text{ m}$ que al compararlo con el dato obtenido en la ecuación (19) presenta un error relativo de:

$$e\% = \left| \frac{0,148 \text{ m} - 0,147 \text{ m}}{0,148 \text{ m}} \right| \times 100\% = 0,67\%$$

La Fig. 10 muestra el tiempo en el cual la partícula alcanza la altura máxima, punto $(0,1\text{s}, 0^0)$. Tracker toma el tiempo desde el punto de lanzamiento $(-x, y)$ hasta el punto donde alcanza la altura máxima $(v_x, 0)$. Si se suma el tiempo de subida (t_s) con el tiempo inicial (t_i) que se muestra en la Tabla 3 para $\theta_{tiro} = 11,9^\circ$, se obtuvo el mismo tiempo suministrado por Tracker, luego:

$$t = t_s + t_i = 0,052 \text{ s} + 0,066 \text{ s} = 0,116 \text{ s} \quad (20)$$

que es el tiempo que indica en la Fig. 10 en el punto $(0^0, 0,1)$.

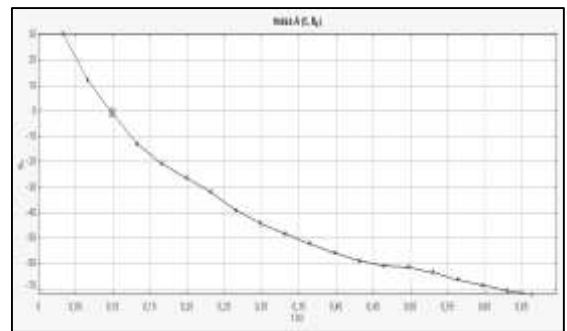


Figura 10. Grafica tiempo en función el tiempo de vuelo (θ_v vs t) mostrando la altura máxima alcanzada.

Fuente: Los autores.

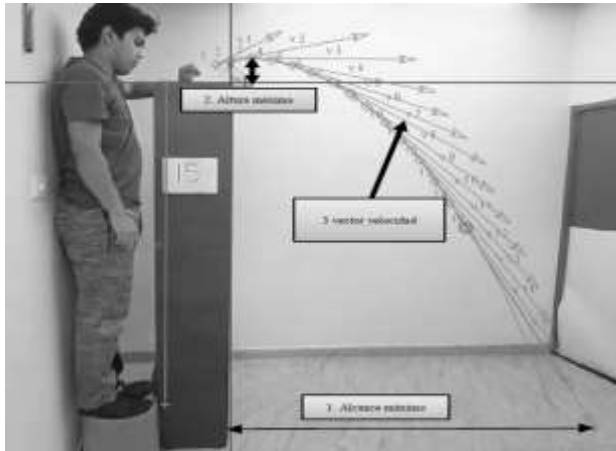


Figura 11. Montaje experimental y medidas tomadas en el Tracker, 1 Alcance máximo. 2 altura máxima y 3. Vectores velocidad
Fuente: Los autores.

Tabla 5
Ángulo tomado desde la mesa hasta la parte cóncava de la cuchara (x_f), altura máxima y tiempo de vuelo (t_v).

Ángulo α		x_f [m]	y_f [m]	t_v [s]
1	Tracker	1,618	0,147	0,696
	Calculado por este trabajo	1,69	0,148	0,7
	Error relativo (*)	4,26%	0,67%	0,57%
2	Tracker	1,428	0,113	0,696
	Calculado por este trabajo	1,59	0,122	0,71
	Error relativo (*)	11,34%	7,37%	1,97%
3	Tracker	1,309	0,104	0,663
	Calculado por este trabajo	1,28	0,104	0,67
	Error relativo (*)	2,21%	0%	1,04%
4	Tracker	0,74	0,104	0,663
	Calculado por este trabajo	0,69	0,096	0,66
	Error relativo (*)	6,75%	8,33%	0,45%
5	Tracker	0,55	0,007748	0,63
	Calculado por este trabajo	0,50	0,007748	0,64
	Error relativo (*)	9,09%	0%	1,56%

(*) Error relativo entre el Tracker (experimental) y el calculado por este trabajo. El x_f medido con un flexómetro para los ángulos de fueron respectivamente 1,692 m, 1,596 m, 1,284 m, 0,69 m y 0,502 m.
Fuente: Los autores

El procedimiento de la sección tres se repitió cuatro veces más para obtener la Tabla 5.

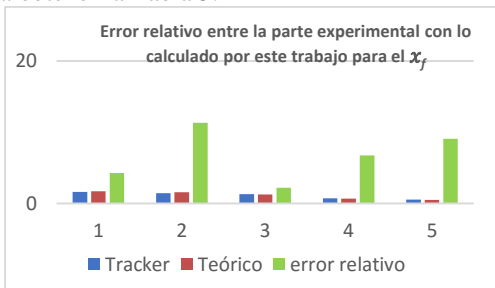


Figura 12. Comparación entre los datos extraídos por el Tracker y los calculados por este trabajo para el alcance máximo, (x_f).
Fuente: Los autores.

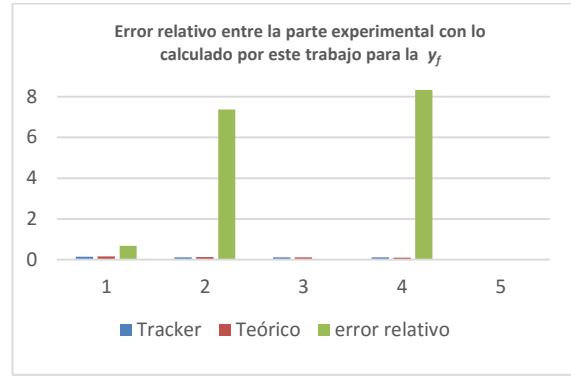


Figura 13. Comparación entre los datos extraídos por el Tracker y los calculados por este trabajo para la altura máxima, (y_f).
Fuente: Los autores.

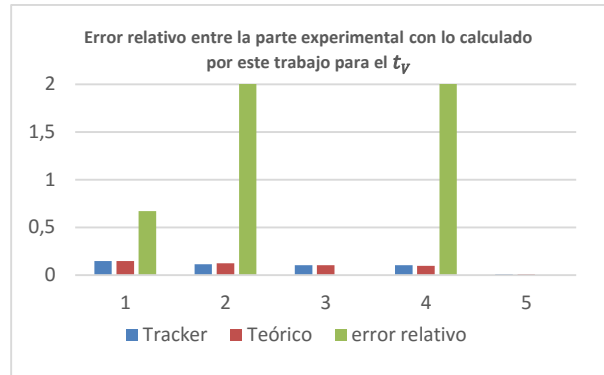


Figura 14. Comparación entre los datos extraídos por el Tracker y los calculados por este trabajo para el tiempo de vuelo (t_v).
Fuente: Los autores.

Las Fig. 12, 13 y 14 son realizadas con los datos de la Tabla 4. Estas muestran los errores calculados para x_f , y_f y t_v de los datos extraídos del Tracker y de los cálculos obtenidos por este trabajo. Estas figuras muestran que las alturas más altas de las barras de errores fueron para los ángulos de $\alpha = 30^\circ$ y 60° debido a las aproximaciones del cálculo del ángulo del tiro parabólico cuando se colocó el transportador en el punto $(0, y_i)$ (Fig. 8).

Para los ángulos de $\alpha = 15^\circ$, 45° y 75° los errores fueron menores al $\sim 5\%$. Datos similares fueron obtenidos por otros autores que realizaron el mismo cálculo, donde reportan un error de $\sim 6,43\%$ entre los obtenidos por el método y lo registrado por la cámara [5].

De acuerdo con Díaz [5] es una buena aproximación teniendo en cuenta que las imágenes digitales estándar aportan a una incertidumbre en las medidas de x_f , y_f y t_v entre el $\sim 1\%$ y $\sim 2\%$.

4 Conclusiones

Se construyó una catapulta de torsión casera donde se grabó el movimiento con cada uno de los ángulos 15° , 30° , 45° , 60° y 75° para obtener con el Tracker seis puntos de interés como son: posiciones iniciales y finales, ángulo de tiro parabólico y los tiempos iniciales, subida y de vuelo. También, se estableció el alcance horizontal promedio usando la catapulta para cada uno de estos ángulos. Mostramos que la masa influye

en el cálculo del x_f debido a varios factores como la fricción y por eso se tomó una masa fija para la realización de todo el experimento.

Con los datos iniciales se determinaron las ecuaciones de movimiento y a partir de éstas se calculó: el tiempo de vuelo, el alcance máximo y la altura máxima. Se compararon estos datos con los datos del Tracker y se obtuvo errores del $\sim 3,9\%$ para el tiempo de vuelo (t_v), del $\sim 0,12\%$ para el alcance máximo (x_f) y del $\sim 0,67\%$ para la altura máxima (y_f). Estos errores tan pequeños indican que Tracker ofrece un acercamiento efectivo para la obtención de los datos experimentales mostrando al estudiante un acercamiento real entre lo teórico y lo experimental.

Se evidenció en toda la práctica que es importante que los estudiantes conozcan del tema antes de utilizar la herramienta Tracker.

Se sugiere como un trabajo complementario, utilizar esta misma herramienta computacional para determinar la velocidad final (v_f) usando el teorema del trabajo y la energía (T.T.E) y la ley de la conservación de la energía mecánica con fuerzas no conservativas como la fricción.

Referencias

- [1] M. Domínguez, “Uso de Tracker para análisis y modelado de datos experimentales en laboratorios tradicionales de Física”, *Revista de la Escuela de Física*, vol. IV, no. 2, pp. 64-69, 2015. <https://doi.org/10.5377/ref.v4i2.8279>
- [2] “Physics Education Technology Project At The University Of Colorado” [En línea]. Disponible en: <http://phet.colorado.edu/simulations>
- [3] L. K. Wee y T. L. LEE, “Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education: A workshop for Redesigning Pedagogy”, *Workshop at the 4th Redesigning Pedagogy International Conference*, pp. 1-5, 2011.
- [4] G. Méndez y S. Rodríguez, “Physics Tracker: Una implementación didáctica para la presentación del tema tiro parabólico en bachillerato”, *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, pp. 734-739, oct. 2014.
- [5] C. Díaz y F. C. Vitery, “Análisis de videos y modelado de sistemas físicos sencillos como estrategia didáctica”, *Revista Educación en Ingeniería*, vol. 9, no. 18, pp. 190-200, 2014. <http://www.educacioneningenieria.org>
- [6] “Physics Tracker”, [En línea]. Disponible en: <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>
- [7] A. Néstor, U. Auqui, J. L. A. Palta, G. N. Andrade, R. J. C. Guaranga, P. M. Tacle, “Diseño de un sistema de generación de chorro de agua de flujo laminar iluminado”, *Ingeniería Mecánica*, vol. 18, no. 3, pp. 181-187, dic. 2015. <http://scielo.sld.cu/pdf/im/v18n3/im06315.pdf>
- [8] G. P. Abdel Rahim G. “Conceptos básicos de física mecánica”, *Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, 2015, [En línea]. Disponible en: <https://editorial.udistrital.edu.co/detalle.php?id=80&f=6>
- G.P. Abdel Rahim Garzón** es Licenciada en Física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1997). Del Departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia obtuvo el título de Especialista en Ciencias Físicas (2002) y de Maestría en Ciencias Físicas (2006). Realizó su doctorado en Ingeniería en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia con Tesis Meritoria en 2016. Es profesora titular de física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ha realizado estudios de investigación en nuevos materiales de las propiedades estructurales y electrónicas a partir de métodos ab-initio y estudios en la caracterización de superficies semiconductoras y su modificación con la adsorción de átomos metálico. ORCID: [0000-0002-8620-7023](https://orcid.org/0000-0002-8620-7023)
- M.A. Moreno Villate**. Estudiante de tecnología en electricidad de media y baja tensión de la Facultad Tecnológica en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4247-2623>