

Uso de Tracker como herramienta de análisis en experimentos caseros para el aprendizaje de la física mecánica

Gladys Patricia Abdel Rahim Garzón & Manuel Antonio Moreno Villate

Facultad Tecnológica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
garahimg@udistrital.edu.co, maamorenov@correo.udistrital.edu.co

Resumen— El objetivo de esta investigación fue estudiar las ecuaciones cinemáticas, las leyes de Newton, el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de la conservación de la energía mecánica mediante tres experimentos caseros usando el software Tracker. El primero consiste en una masa sobre un plano inclinado con tres superficies diferentes; el segundo es un sistema de dos masas unidas por una cuerda inextensible: donde una está sobre el plano inclinado y la otra está suspendida; el plano inclinado se trabajó con tres superficies y tres ángulos diferentes y el tercer experimento, es un sistema masa-resorte donde se trabajó con una sola superficie y un solo ángulo del plano inclinado. Se utilizó Tracker para obtener las ecuaciones y gráficas de las ecuaciones de movimiento y de las energías. Se compararon los cálculos teóricos con los datos experimentales de la aceleración y velocidad final donde se obtuvo un buen ajuste y se calculó la velocidad final por dos métodos utilizando los conceptos de trabajo-energía.

Palabras Clave—Cinemática, leyes de Newton, trabajo-energía, Tracker

Recibido: 27 de julio de 2021. Revisado: 11 de abril de 2022. Aceptado: 5 de julio de 2022

Using dynamics and kinematics to obtain kinetic, potential and mechanical energy with Tracker

Abstract— The goal of this project is the study of the kinematic equations, Newton's laws, the theorem about work and kinetic energy, and the conservation law of the mechanical energy by means of three home-made experiments. The first one consists of a mass on an inclined plane with three different surfaces. The second one uses a system of two masses, which are joint by an inextensible string: one is located on the inclined plane and the other one is a sprung mass. For the included plane we use three surfaces and inclination angles. The third experiment is based on a mass-spring system, with a single surface and inclination angle. We use the tool Tracker to obtain the equations of motion and plots of the motion and energies. We compare the theoretical calculations to the experimental data for the acceleration and final speed, which led to a good fit. We computed the final speed by two methods, based on the concepts of work and energy.

Keywords— kinematic, Newton's laws, work-energy, Tracker

1 Introducción

La cinemática, la dinámica y la energía mecánica proporcionan conceptos fundamentales para posteriores cursos de ciencias e ingeniería [1], [2], [3]. Por nombrar algunos temas como es el caso del movimiento de una partícula cargada que entra en un campo eléctrico y/o magnético uniforme, el funcionamiento de las máquinas e instrumentos que están presentes en nuestras actividades cotidianas, el movimiento de una partícula que oscila en diferentes medios como: aire, agua o vacío, la demostración de la ecuación del efecto Compton; entre otros. Por lo tanto, es importante que para el futuro

estudiante de ciencias o ingeniería estos conceptos sean comprendidos tanto física como matemáticamente.

En los últimos años se ha informado por muchos medios que los estudiantes colombianos en las pruebas PISA obtuvieron el peor desempeño académico entre los países de la OCDE. Una posible solución a esta situación es incluir en los procesos de enseñanza-aprendizaje el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), debido a que se ha demostrado que estas tecnologías contribuyen a que los estudiantes de ingeniería aprendan y entiendan los fundamentos y conceptos, y no se limiten a resolver mecánicamente los ejercicios.

Otra posible solución al mal desempeño de los estudiantes colombianos en las pruebas PISA fue propuesta en [4] y [5], donde sus autores afirman que una forma de adquirir los conceptos de manera más efectiva es mediante el aprendizaje basado en proyectos, ya que se ha demostrado que los estudiantes en el desarrollo de éstos, siguen una ruta que les permite realizar una bitácora que evidencia su proceso de aprendizaje.

En el presente trabajo se describe un proyecto de clase, donde los estudiantes realizan tres experimentos caseros y con el apoyo de Tracker obtienen los datos necesarios para hallar algunas magnitudes físicas como la aceleración y determinar otras, como, por ejemplo: la fuerza neta, trabajo neto, energía mecánica y la velocidad final.

El Tracker es un software de uso libre, utilizado para analizar videos y construir modelos dinámicos en ambiente Java, creado en el marco del proyecto Open Source Physics (OSP), la versión usada fue 6.0.9 (Julio 2022) [6].

El primer experimento casero consiste en un bloque de hierro que se desplaza sobre un plano inclinado con tres diferentes superficies (madera, lija, hierro) y tres diferentes ángulos (30° , 45° y 60°). El segundo experimento, contiene dos cuerpos atados por una cuerda inextensible, una masa de hierro que esta sobre un plano inclinado con tres superficies diferentes y tres ángulos distintos (30° , 45° y 60°). El tercer experimento es un sistema masa-resorte ubicado sobre un plano inclinado de 60° .

En cada uno de los experimentos se calcula: la aceleración tanto experimental como teórica, la fuerza neta, el trabajo neto, el trabajo realizado por la fuerza de fricción, la velocidad final; usando el teorema trabajo-energía cinética y la ley de la conservación de la energía mecánica con fricción.

Es importante notar que el desarrollo de los anteriores temas está como aparece en el currículo del curso de física mecánica para ingenieros. Por lo anterior, este trabajo es un gran apoyo tanto para estudiantes como para los docentes ya que prácticas de laboratorios presentadas en este trabajo hacen parte fundamental de la temática del curso.

2 Materiales

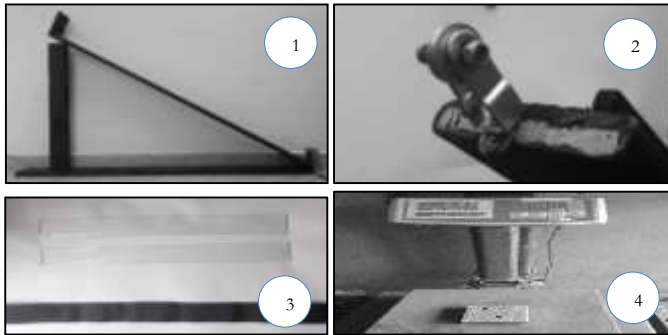


Figura 1. Materiales utilizados en los experimentos
Fuente: Los autores

En la Fig. 1 son presentadas las fotos de los materiales usados. En la Fig. 1-1 se muestra el plano inclinado que fue construido con dos tablas de madera que están unidas mediante una bisagra. Una tabla funciona como plano inclinado y la otra funciona como soporte. En la Fig. 1-2 se exhibe la polea de rodamiento que fue construida con un rodamiento de bolas, ensamblada en una horqueta metálica y un tornillo como eje de rotación. En la Fig. 1-3 se presentan las superficies de rozamiento: tabla de madera, una tira de vidrio (de 4 mm de espesor) del tamaño de la tabla y una tira de lija (número 80) que abarca toda la tabla de madera inclinada. En la Fig. 1-4 se muestra la masa de hierro sólido y en la tabla 1 el volumen y el valor de las masas utilizadas en cada una de las experiencias.

Tabla 1

Volumen y el valor de las masas utilizadas en cada una de las tres experiencias

Montaje experimental	Masa Sobre el Plano [kg]	Volumen [cm ³]	Masa colgante [kg]	Volumen [cm ³]
1	2,35	308	No	No
2	2,35	308	2,56 + pastillas de 0,85 kg	288 + Pastillas de 5 cm de diámetro y 0,7 cm de grosor
3	2,35	308	No	No

Fuente: Los autores.

En la implementación de experimento las masas se pintaron de rojo con el fin de que Tracker capture la trayectoria con mayor exactitud.

2.1 Montajes experimentales

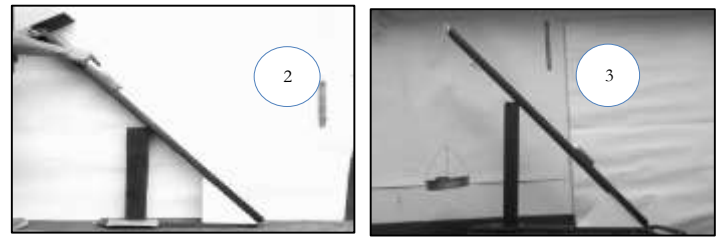
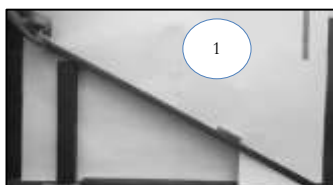


Figura 2. Los tres montajes realizados para los experimentos
Fuente: Los autores.

En la Fig.2.1-1 se exhibe el primer montaje experimental realizado para grabar el video; el cual contiene un fondo blanco, un plano inclinado de madera pintado de color negro, una cuña triangular de madera de 30° pintada de color blanco y una masa de hierro sólido de color rojo. Para el experimento se construyeron dos cuñas más: de 45° y 60°. Además, se hicieron dos tiras de lija y vidrio del mismo largo y ancho del plano inclinado. La Fig.2.1-2 se muestra el segundo montaje experimental, el cual cuenta con un fondo blanco, un plano inclinado de madera pintado de color negro fijándose en la parte superior una polea, una cuña triangular de madera de 30° pintada de color blanco y dos masas de color rojo unidas por una cuerda inextensible. En este experimento se utilizaron las dos tiras y cuñas del primer experimento. La Fig.2.1-3 muestra el tercer montaje experimental que incluye un fondo blanco, un plano inclinado de madera pintado de color negro donde en la parte superior se colocó un resorte, una cuña triangular de madera de 60° pintada de color blanco y una masa de color oscuro rojo unida al resorte.

2.2 Elementos del Tracker utilizados en los experimentos

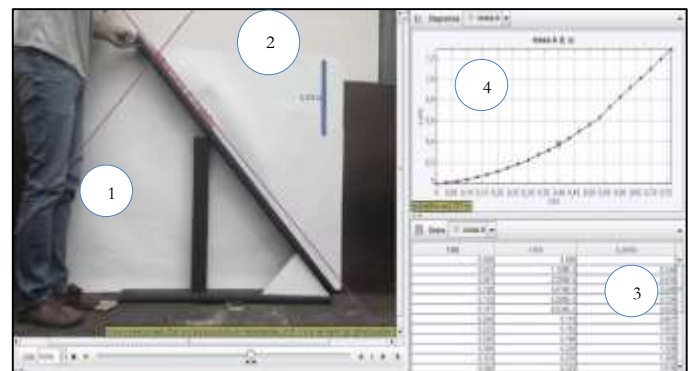


Figura 3. Ejemplo de simulación Tracker
Fuente: Los autores

Para realizar las grabaciones de los experimentos se deben tener presentes las herramientas y la lectura de Tracker que se muestran a partir del análisis del video (véanse los círculos 1 y 2 en la Fig. 3). El plano cartesiano (1) permitirá ubicar la trayectoria de la masa y la vara de calibración (2) permite que el programa de simulación tome una medida estándar y a partir de ésta pueda derivar la escala a la cual se está realizando el experimento. La tabla de datos (3) sintetiza los datos de la trayectoria. Una vez obtenida la trayectoria total, el programa realiza la gráfica -ver la gráfica (4) de la Fig. 3.

Tabla 2

Ecuaciones del movimiento obtenidas con Tracker para las tres superficies y tres ángulos

Análisis cinemático del estudio del plano inclinado con tres superficies			
ángulo del plano inclinado	posición en función del tiempo [m]	velocidad en función del tiempo $\left[\frac{m}{s}\right]$	Aceleración $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
Superficie: madera-hierro			
30°	$x(t) = 0,167t^2 + 0,0905t + 0,27$	$v(t) = 0,316t + 0,0905$	0,334
45°	$x(t) = 2,163t^2 + 0,327t + 0,1154$	$v(t) = 4,326t + 0,327$	4,326
60°	$x(t) = 2,11t^2 + 1,012t + 0,168$	$v(t) = 4,22t + 1,012$	4,220
Superficie: lija-hierro			
30°	$x(t) = 1,022t^2 + 0,0528t + 0,00486$	$v(t) = 2,044t + 0,0528$	2,044
45°	$x(t) = 1,719t^2 + 0,2389t + 0,00176$	$v(t) = 3,438t + 0,2389$	3,438
60°	$x(t) = 2,854t^2 + 0,2894t - 0,00766$	$v(t) = 5,708t + 0,2894$	5,708
Superficie: vidrio-hierro			
30°	$x(t) = 1,539t^2 + 0,3104t + 0,0320$	$v(t) = 3,078t + 0,3104$	3,078
45°	$x(t) = 2,953t^2 + 0,1912t + 0,00101$	$v(t) = 5,906t + 0,1912$	5,906
60°	$x(t) = 3,112t^2 + 0,5320t - 0,00542$	$v(t) = 6,224t + 0,5320$	6,224

Fuente: Los autores.

3 Estudio del movimiento de una masa de hierro sobre un plano inclinado de madera

La práctica de laboratorio casero aquí presentada inicialmente fue realizada para determinar el coeficiente de fricción cinético de las superficies madera-lija, lija-hierro y vidrio-hierro[8]. Pero surgió la iniciativa de estudiar la cinemática, dinámica y la energía mecánica utilizando el mismo montaje experimental apoyado con el software Tracker como se muestra a continuación.

3.1 Cálculo experimental de las ecuaciones de movimiento (posición, velocidad como funciones del tiempo y la aceleración)



Figura 4. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 30°, entre las superficies madera-hierro.

Fuente: Los autores.



Figura 5. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 45°, entre las superficies madera-hierro.

Fuente: Los autores.

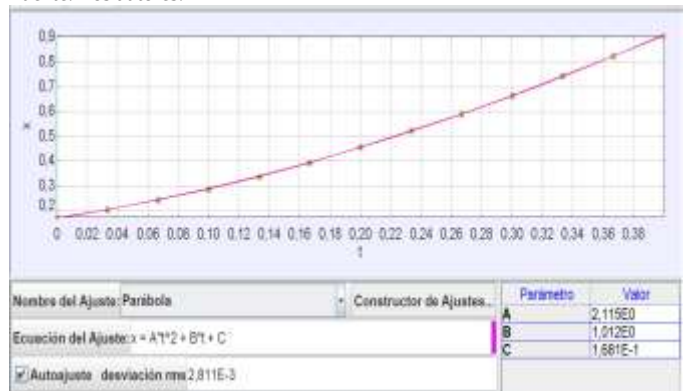


Figura 6. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 60°, entre las superficies madera-hierro.

Fuente: Los autores.

El primer montaje experimental es mostrado en la Fig. 3, el cual consta de una masa de hierro sólido de 2,35 kg de color rojo, un plano inclinado de madera de color negro que forma un ángulo con la horizontal de 30°, una cuña de madera blanca del mismo ángulo y una regla de 30 cm.

Tracker permitió cuantificar la caída de la masa sobre el plano inclinado obteniéndose las Fig. 4-6 donde se muestra las gráficas de posición en función del tiempo para los ángulos de 30°, 45° y 60° de la superficie madera-hierro. En la tabla 2 se exponen las ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo y la aceleración para las tres diferentes superficies: madera-hierro, lija-hierro y vidrio-hierro de los ángulos de 30°, 45° y 60° que corresponden a los ajustes de las gráficas obtenidas con el Tracker.

En la Fig. 7 se presenta una comparación de las gráficas de las Fig. 4-6, donde se observa que para el ángulo de 30° la parábola es más “amplia” con respecto a las otras dos gráficas. También se observa que al aumentar el ángulo del plano inclinado la aceleración aumenta debido a que las fuerzas de fricción y normal se hacen menores.

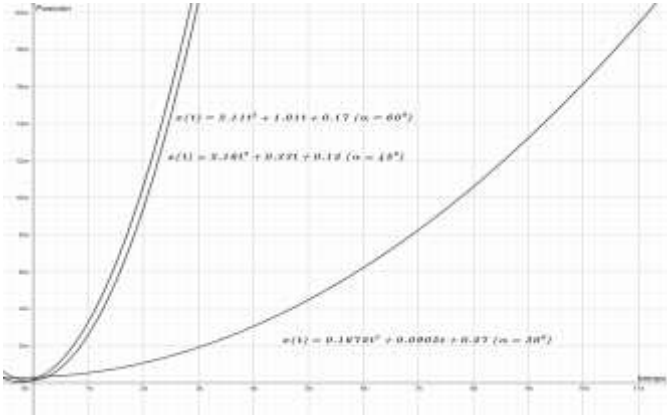


Figura 7. Comparación de las gráficas y sus respectivos ajustes de la posición en función del tiempo para los ángulos: 30°, 45° y 60° de la superficie madera-hierro.

Fuente: Los autores.

3.2 Cálculo teórico de la aceleración (a), fuerza neta (F_{neto}) y trabajo neto (W_{neto}) para el ángulo de plano indicando de 30° en la superficie madera-hierro

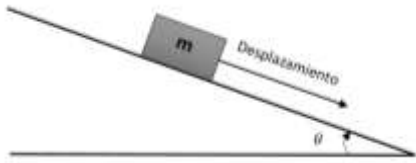


Figura 8. Desplazamiento de la masa sobre el plano inclinado.

Fuente: Los autores.

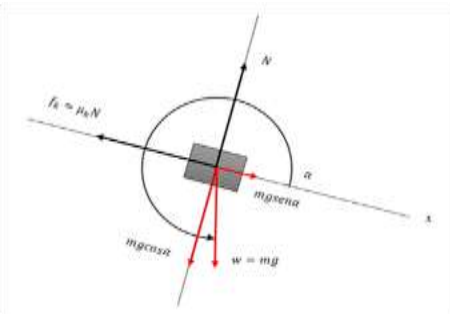


Figura 9. Diagrama de cuerpo libre para la masa.

Fuente: Los autores.

Para realizar el estudio teórico de la aceleración a , de la fuerza neta F_{neto} y del trabajo neto W_{neto} , primero, se tiene en cuenta la dirección en que se mueve la masa de hierro sobre el plano inclinado de madera como se muestra en la Fig. 8; segundo, se dibuja las fuerzas que actúan sobre la masa mientras se desplaza hacia abajo del plano inclinado (Fig.9); tercero, se aplica la segunda ley de Newton para determinar la aceleración de la masa mientras cae ([1], pp. 153; [3], pp.150), [7]).

En la Fig. 10 es mostrada la forma en que se ubicó el sistema de coordenadas donde la dirección en que se mueve la masa es paralela al eje x positivo. Por lo tanto, la dirección de las fuerzas que actúan sobre la masa, son las siguientes:

- La fuerza de fricción que forma un ángulo de $\theta = 180^\circ$ con el eje x , debido a que la fuerza de fricción se define como $f_k = \mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción dinámico y N la fuerza normal. El μ_k fue calculado previamente por los mismos autores de este trabajo [8].
- El peso (w) que forma un ángulo de $\theta = 300^\circ$ con el eje x , que por definición es $w = mg$, equivale al producto de la masa por la aceleración de la gravedad.
- La fuerza normal que forma un ángulo de $\theta = 90^\circ$ con eje $+x$.

Posteriormente, se aplica la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. Como la masa se acelera en la dirección de $+x$, la fuerza neta que actúa sobre la m , es positiva $\Sigma F_x = ma_x$, luego:

$$N \cos(90^\circ) + mg \cos(300^\circ) + f_k \cos(180^\circ) = ma_x \quad (1)$$

Despejando la aceleración horizontal (a_x), se obtiene:

$$a_x = \frac{0,5mg - f_k}{m} \quad (2)$$



Figura 10. Ubicación del plano cartesiano para definir las tablas y gráficas de las ecuaciones de movimiento.

Fuente: Los autores.

Para hallar la fuerza normal (N), aplicamos la primera ley de Newton, $\Sigma F_y = 0$, así:

$$N \sin(90^\circ) + mg \sin(300^\circ) + f_k \sin(180^\circ) = 0 \quad (3)$$

o lo que es lo mismo:

$$N = 0,86mg \quad (4)$$

Esto implica que la fuerza de fricción, es:

$$f_k = \mu_k N = 0,86\mu_k mg \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (2), se obtiene:

$$a_x = \frac{0,5mg - 0,86\mu_k mg}{m} \quad (6)$$

Factorizando la masa en el numerador y simplificando con el denominador mostrando que la aceleración en este sistema depende de las superficies en contacto y del campo gravitacional, así:

$$a_x = [0,5 - 0,86\mu_k]g \quad (7)$$

Remplazando el valor de la aceleración de la gravedad, $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ y el coeficiente de fricción cinético, $\mu_k = 0,53$ [8], para las superficies madera-hierro en la ec. (7), se obtiene:

$$a_x = \left(9,8 \frac{m}{s^2}\right) [0,5 - 0,86(0,53)] = 0,43 \frac{m}{s^2} \quad (8)$$

Al comparar el valor experimental (tabla 2) con el valor teórico ec. (8), se obtiene un error relativo de $\sim 22,32\%$ es un valor grande comparado con el que se obtiene en el laboratorio de física utilizado materiales más elaborados.

El error, es debido a que no se obtuvo un valor exacto para μ_k , sino que éste variaba entre $0,53 < \mu_k < 0,55$ [8]. Por lo anterior es importante que para obtener un valor más exacto de μ_k se calcule con materiales y montajes más elaborados, que son los que se encuentran en un laboratorio de física mecánica.

Para determinar la fuerza neta (F_{neta}) aplicamos la segunda ley de Newton. Como la F_{neta} es paralela al eje x positivo. ([1], pp. 142; [2], pp. 113; [3], pp.139), se tiene que:

$$F_{neta} = ma_x \quad (9)$$

Sustituyendo el valor de la ec. (8) en la ec. (9), se obtiene:

$$F_{neta} = (2,35 \text{ kg}) \left(0,43 \frac{m}{s^2}\right) = 1,01 \text{ N} \quad (10)$$

El trabajo neto efectuado por la F_{neta} que actúan sobre la masa cuando cae ([2], pp. 185), es:

$$W_{neto} = F_{neta} \Delta x \quad (11)$$

Sustituyendo el valor de la ec. (10) en la ec. (11), se obtiene:

$$W_{neto} = (1,01 \text{ N})(\Delta x) \quad (12)$$

En la Fig. 10 muestra el valor del desplazamiento ($\Delta x = 1,258 \text{ m}$) medido con la cinta métrica de Tracker, por lo tanto:

$$W_{neto} = (1,01 \text{ N})(1,258 \text{ m}) = 1,27 \text{ J} \quad (13)$$

En la Fig. 11 se muestra la gráfica de la velocidad final (v_f) en función Δx . En ella se observa que entre $0,228 \text{ m} < x < 0,514 \text{ m}$, la velocidad es de $\sim 0,3 \frac{m}{s}$ y comienza a aumentar al aumentar el desplazamiento.

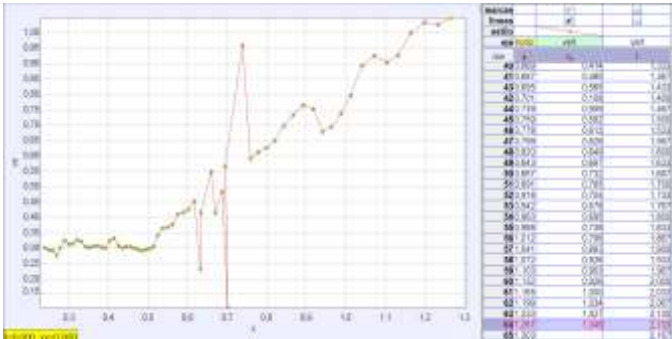


Figura 11. Gráfica de v_f en función de la posición, entre las superficies madera-hierro.

Fuente: Los autores.

3.3 Cálculo de la velocidad final (v_f) usando el teorema del trabajo-energía cinética

Por definición “el trabajo neto efectuado por la fuerza neta sobre la partícula es igual al cambio de la energía cinética de la partícula” ([2], pp. 187; [2], pp. 183; [3], pp.192), así:

$$W_{neto} = (\Delta K)_n \quad (14)$$

Donde, n corresponde al número de masas que en este caso se es $n = 1$, además el cambio de la energía cinética se toma como: $\Delta K = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$, sustituyendo esta igualdad en la ec. (14) y despejando la velocidad final, se obtiene:

$$v_f^2(x) = \frac{2}{m} \left[W_{neto} + \frac{mv_i^2}{2} \right] \quad (15)$$

Sustituyendo la $v_i = 0,0905 \frac{m}{s}$ (Tabla 2), $m = 2,35 \text{ kg}$ y $W_{neto} = 1,27 \text{ J}$ en la ec. (15), se obtiene:

$$v_f^2(x) = \frac{2}{2,35 \text{ kg}} \left[1,27 \text{ J} + \frac{(2,35 \text{ kg}) \left(0,0905 \frac{m}{s}\right)^2}{2} \right] \quad (16)$$

$$v_f^2(x) = \frac{2}{2,35 \text{ kg}} \left[1,27 \text{ J} + \frac{(2,35 \text{ kg}) \left(0,0905 \frac{m}{s}\right)^2}{2} \right]$$

$$v_f^2(x) = \frac{2}{2,35 \text{ kg}} [1,27 + 0,0082] \text{ kg} \frac{m^2}{s^2}$$

$$v_f = \sqrt{0,85[1,27 + 0,0082] \frac{m^2}{s^2}}$$

Donde la velocidad final es: $v_f = 1,043 \frac{m}{s}$

Tabla 3

Resumen de los cálculos teóricos de la aceleración a , la fuerza neta F_{neta} , el trabajo W_{neto} y la velocidad final v_f calculada para $\Delta x = 1,258 \text{ m}$.

Análisis cinemático del estudio del plano inclinado con tres superficies					
Coeficiente dinámico	ángulo del plano inclinado	$a \left[\frac{m}{s^2}\right]$	$F_{neta} [N]$	$W_{neto} [J]$	$v_f \left[\frac{m}{s}\right]$
Superficie madera-hierro					
$\mu_k = 0,53$	30°	0,43	1,01	1,27	1,04
	45°	3,23	7,59	9,54	2,86
	60°	5,83	13,70	17,23	3,96
Superficie lija-hierro					
$\mu_k = 0,33$	30°	2,12	4,98	6,26	2,31
	45°	4,60	10,81	13,59	3,41
	60°	6,80	15,98	20,10	4,14
Superficie vidrio-hierro					
$\mu_k = 0,22$	30°	3,05	7,16	9,00	2,78
	45°	5,35	12,57	15,81	3,67
	60°	7,34	17,24	21,68	4,32

Fuente: Los autores.

En la tabla 3 se muestra el resumen de los cálculos de la aceleración a , de la fuerza neta F_{net} , el trabajo neto W_{net} y la velocidad final v_f obtenidos repitiendo el procedimiento anterior para las superficies lija-hierro y vidrio-hierro, con los ángulos del plano inclinado de 45° y 60° .

3.4 Cálculo del trabajo realizado por la fuerza de fricción

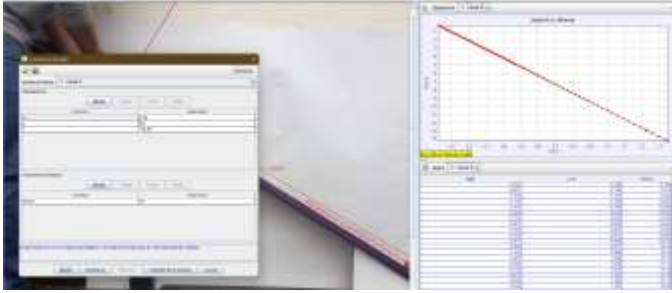


Figura 12. Gráfica del trabajo de roce en función de la posición con Tracker.
Fuente: Los autores.

Al multiplicar la ec. (5) por Δx , se obtiene el valor del trabajo de la fuerza de fricción ([2] pp. 174), así:

$$W_{\text{roce}} = -0,86(0,53)(2,35 \text{ kg})\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\Delta x) \quad (17)$$

$$W_{\text{roce}} = [-10,49(\Delta x)] J \quad (18)$$

Se incluyó la ec. (18) en la “herramienta de magnitudes” de Tracker como se muestra en la Fig. 12 para obtener la gráfica de W_{roce} en función de la posición; donde indica, que a medida que cae la masa, el trabajo realizado por la fuerza de fricción aumenta mientras se desplaza por el plano inclinado; este aumento negativo del trabajo realizado por la fuerza de fricción corresponde a la cantidad de energía que se convierte en energía interna del sistema hierro-madera. Sobre esta energía se profundiza más en los cursos de termodinámica.

3.5 Cálculo de la velocidad final (v_f) usando la ley de la Conservación de la energía mecánica

En la Fig. 13 se muestra el antes de moverse la masa y después de desplazarse 1,258 m con el fin de precisar la energía mecánica en cada punto.

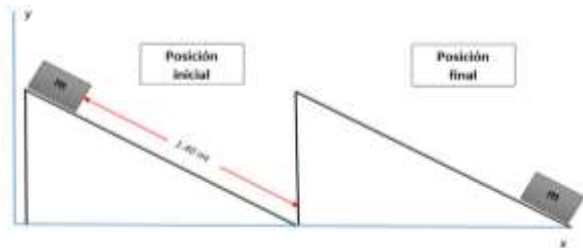


Figura 13. Posiciones iniciales y finales de la masa sobre el plano inclinado
Fuente: Los autores.

La ley de la conservación de la energía mecánica se define como “el trabajo realizado por la fuerza de fricción es igual al cambio de la energía mecánica” ([1], pp. 217):

$$W_{\text{roce}} = \Delta E_n \quad (19)$$

Donde n corresponde al número de masas que en este caso es $n=1$, así,

$$W_{\text{roce}} = (E_f - E_i)_{n=1} \quad (20)$$

La energía mecánica (E) se define como la suma de la energía cinética ($K \equiv \frac{mv^2}{2}$) más la energía potencial gravitacional ($E_p = mg\Delta y$). La ec. (19) se puede presentar, como:

$$W_{\text{roce}} = (K_f + E_{pf}) - (K_i + E_{pi}) \quad (21)$$

sustituyendo K y E_p , en la ec. (21), se obtiene:

$$W_{\text{roce}} = \frac{mv_f^2}{2} + mgh_f - mgh_i - \frac{mv_i^2}{2}$$

despejando la velocidad final, se tiene que:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m} \left(-10,49(\Delta x) - mgh_f + mgh_i + \frac{mv_i^2}{2} \right)}$$

Donde de acuerdo a la Fig. 13, se tiene que $h_f = 0$ m, por lo tanto:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m} \left(-10,49(\Delta x) + mgh_i + \frac{mv_i^2}{2} \right)} \quad (22)$$

Sustituyendo los siguientes valores de $v_i = 0,0905 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (ver la tabla 2), $\Delta x = 1,258$ m (Fig. 10), $h_i = 1,258$ m $\text{sen } 30^\circ = 0,629$ m (Fig. 13), $W_{\text{roce}} = -10,49$ N (1,258 m) = $-13,19$ J (ec. (17)), en la ec. (22), se obtiene:

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{\frac{2}{2,35 \text{ kg}} \left(-13,19 \text{ J} + (2,35 \text{ kg})\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0,629 \text{ m}) + \frac{2,35 \text{ kg} \left(0,0905 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} \right)} \\ v_f &= \sqrt{\frac{2}{2,35 \text{ kg}} (-13,19 \text{ J} + 14,48 \text{ J} + 0,0096 \text{ J})} \\ v_f &= \sqrt{\frac{2}{2,35 \text{ kg}} (1,28) \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 1,05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

En la tabla 4 se muestran los errores relativos porcentuales de la velocidad final entre el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de conservación de la energía mecánica, corresponden a $\sim 0,57\%$ y $\sim 0,09\%$, respectivamente.

Lo anterior evidencia que el Tracker permite a partir de una experiencia casera obtener los datos experimentales que son comparables con los cálculos teóricos.

Tabla 4
Resumen de los resultados

Resultados usando el teorema del trabajo y la energía		
	Δx [m]	v_f $\left[\frac{m}{s}\right]$
Experimental	1,267	1,049
Teórico	1,258	1,043
Resultados usando la ley de la conservación de la energía mecánica		
	Δx [m]	v_f $\left[\frac{m}{s}\right]$
Experimental	1,267	1,049
Teórico	1,258	1,05

Fuente: Los autores.

En la tabla 4 se muestra el resumen de los datos teóricos y experimentales del Δx y de la v_f usando el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de la conservación de la energía mecánica de la superficie madera-hierro para 30° . La $v_f = 1,049 \frac{m}{s}$, se obtuvo de la Fig. 11 en $\Delta x = 1,258$ m en un tiempo de $t = 2,133$ s.

3.6 Cálculo experimentales de las energías para el ángulo del plano inclinado de 30° para la superficie, madera– hierro

En esta sección se describe el cálculo de la velocidad final usando la ley de la conservación de la energía mecánica ([1], pp. 217). El plano cartesiano utilizado para realizar el estudio de las energías se muestra en la Fig. 14. Las gráficas de la Fig. 15 corresponden a las curvas de las energías K y E_p en función de la altura (Δy), donde se observa que los valores de E_p son mucho mayores que los valores de K , lo que indica que la energía mecánica no es constante debido al trabajo realizado por la fricción W_{roce} .



Figura 14. Ubicación del plano cartesiano para medir la energía potencial
Fuente: Los autores.

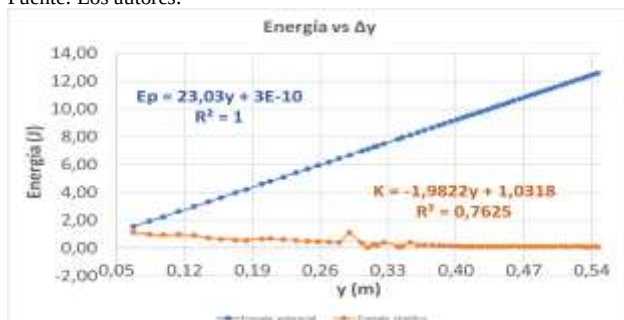


Figura 15. Gráfico comparativo entre las energías E_p y K en función de la posición.
Fuente: Los autores.

4 Estudio de un sistema de dos masas unidas por una cuerda inextensible

Antes de realizar este proyecto, el estudiante diseño y construyó en su casa el montaje experimental; seguidamente se explicó los conceptos de dinámica, cinemática y la energía mecánica que se estudian comúnmente en este tipo de experiencias en forma magistral; se realiza el video utilizando un celular común y finalmente el análisis del mismo como se muestra a continuación.

4.1 Cálculo experimental de las ecuaciones de movimiento (posición y velocidad como funciones del tiempo y la aceleración)

En la Fig. 16 se muestra el montaje experimental para realizar el video. Este montaje consta de dos masas unidas por una cuerda inextensible, una sobre un plano inclinado (m_1) y la otra suspendida (m_2) donde $m_2 > m_1$. Además de indicar como se ubicó el plano cartesiano en donde el origen del sistema se toma sobre la base del mismo. La coordenada de +x positiva se tomó paralela a la dirección en que la m_1 sube, ósea hacia arriba del plano cartesiano.

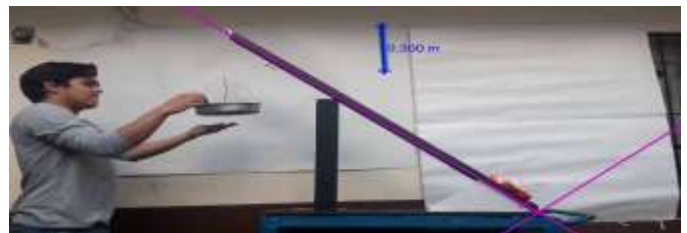


Figura 16. Ubicación del plano cartesiano para definir las tablas y gráficas de las ecuaciones de movimiento.
Fuente: Los autores.



Figura 17. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 30° , entre las superficies madera-hierro.
Fuente: Los autores.



Figura 18. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 45° , entre las superficies madera-hierro.
Fuente: Los autores.



Figura 19. Gráfica y su respectivo ajuste de la posición en función del tiempo para el ángulo de 60°, entre las superficies madera-hierro.
Fuente: Los autores.

Tabla 5. Ecuaciones de movimiento obtenidas con Tracker

Análisis cinemático de un sistema de dos cuerpos con tres superficies			
Superficie en contacto	posición en función del tiempo [m]	Velocidad en función del tiempo $\left[\frac{m}{s}\right]$	Aceleración $\left[\frac{m}{s^2}\right]$
Superficie madera-hierro			
30°	$x(t) = 0,2781t^2 + 0,715t + 0,3762$	$v(t) = 0,557t + 0,715$	0,557
45°	$x(t) = 0,2185t^2 + 0,0449t + 0,241$	$v(t) = 0,437t + 0,0449$	0,437
60°	$x(t) = 0,2151t^2 + 0,2986t + 0,228$	$v(t) = 0,430t + 0,2986$	0,430
Superficie lija-hierro			
30°	$x(t) = 0,4988t^2 - 0,0059t + 0,158$	$v(t) = 0,997t - 0,0059$	0,997
45°	$x(t) = 0,2498t^2 + 0,218t + 0,257$	$v(t) = 0,4996t + 0,218$	0,499
60°	$x(t) = 0,1040t^2 + 0,2817t + 0,1210$	$v(t) = 0,208t + 0,2817$	0,208
Superficie vidrio-hierro			
30°	$x(t) = 0,3770t^2 + 0,3986t - 0,0397$	$v(t) = 0,754t + 0,3986$	0,754
45°	$x(t) = 0,4167t^2 + 0,2760t - 0,01196$	$v(t) = 0,833t + 0,2760$	0,833
60°	$x(t) = 0,3647t^2 + 0,2558t - 0,00109$	$v(t) = 0,729t + 0,2558$	0,729

Fuente: Los autores.

El montaje experimental fue diseñado teniendo presente que en su construcción el plano inclinado quedara en el primer cuadrante y que $m_1 > m_2$. Con las características del montaje indicadas anteriormente se obtuvo las ecuaciones de posición y velocidad en función del tiempo y la aceleración para las tres diferentes superficies: madera-hierro, lija-hierro y vidrio-hierro de los ángulos de 30°, 45° y 60° que corresponden a los ajustes de las gráficas obtenidas con Tracker (Tabla 5).

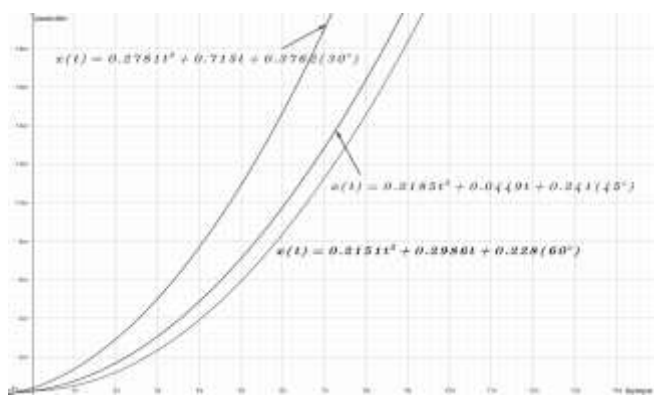


Figura 20. Gráficas y sus respectivos ajustes de la posición en función del tiempo para los ángulos de 30°, 45° y 60°. Superficie madera-hierro.
Fuente: Los autores

En las Fig. 17-19 se representan las gráficas de posición en función del tiempo con sus respectivos ajustes, obtenidas con Tracker en los ángulos 30°, 45° y 60°, respectivamente. En la Fig. 20 se muestra la comparación entre estas gráficas: donde se observa que la concavidad de las curvas aumenta al incrementarse el ángulo del plano inclinado y disminuye el valor de la aceleración en las superficies lija-hierro. Lo que no ocurre para las otras dos superficies, ya que la aceleración es casi constante.

En la tabla 5 se muestra que para las superficies madera-hierro la aceleración estaría entre un rango de $\sim 0,43 \leq a \left(\frac{m}{s^2}\right) \leq \sim 0,557$, para la superficie lija-hierro esta entre $\sim 0,208 \leq a \left(\frac{m}{s^2}\right) \leq \sim 0,997$ y para vidrio-hierro estaría entre $\sim 0,729 \leq a \left(\frac{m}{s^2}\right) \leq \sim 0,833$.

4.2 Cálculo teórico de la aceleración (a), fuerza neta (F_{neta}) y trabajo neto (W_{neto}) para el ángulo de plano indicando de 30° en la superficie madera-hierro

Para realizar los cálculos teóricos de la aceleración a , la fuerza neta F_{neta} y el trabajo neto W_{neto} primero, se determina la dirección en que el sistema se mueve, como se indica en la Fig. 21 en sentido anti horario; segundo, se dibujan las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas en un diagrama de cuerpo libre (Fig. 22), y tercero, se usa la segunda ley de Newton para

determinar la aceleración y la tensión del sistema ([2], pp. 142; [3], pp.150).

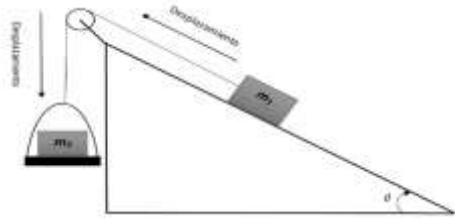


Figura 21. Dirección del desplazamiento de cada una de las masas
Fuente: Los autores.

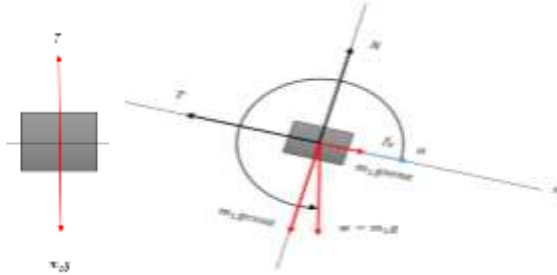


Figura 22. Diagrama de cuerpo libre para: m_2 (izquierda) y m_1 (derecha)
Fuente: Los autores

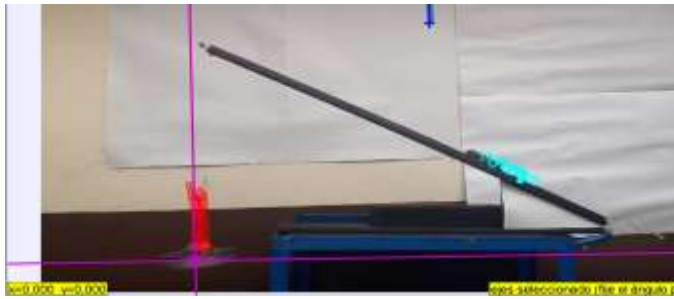


Figura 23. Ubicación del plano cartesiano utilizado para calcular la aceleración del sistema, para m_2
Fuente: Los autores.

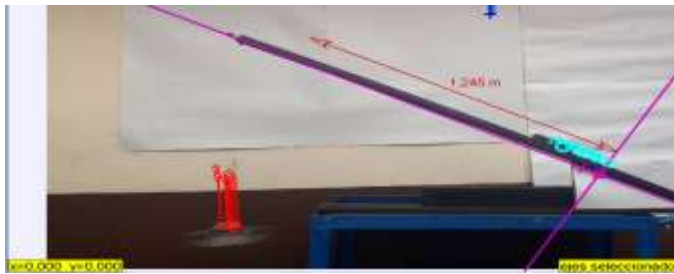


Figura 24. Ubicación del plano cartesiano utilizado para calcular la aceleración del sistema, para m_1 .
Fuente: Los autores.

Para realizar los cálculos teóricos de la aceleración a , de la fuerza neta F_{net} , el trabajo neto W_{net} y la velocidad final v_f primero se define la dirección en que el sistema se mueve, como se indica la Fig. 21 en sentido antihorario; segundo, se dibujan las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas en un diagrama de cuerpo libre (Fig. 22), y tercero, se usa la segunda ley de Newton para determinar la aceleración y la tensión del sistema ([2], pp. 142; [3], pp.150).

4.2.1 Para la masa m_2

En la Fig. 22 (izquierda) se muestra el diagrama de cuerpo libre de m_2 , donde se dibujan las fuerzas que actúan sobre ella y en la Fig. 23 se indica cómo se tomó el plano cartesiano para obtener los datos en Tracker.

Las fuerzas que actúan sobre m_2 son: el peso (que forma un ángulo de $\theta = 270^\circ$ con el $+x$) y la tensión (que forma un ángulo de $\theta = 90^\circ$ con el $+x$).

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene que:

$$\sum F_y = -m_2 a \quad (23)$$

Donde el negativo de la fuerza neta que actúa sobre m_2 , obedece a que la m_2 se desplaza hacia abajo del eje y , de acuerdo con la ec. (23), se tiene que:

$$T \sin 90^\circ + m_2 g \sin 270^\circ = -m_2 a \quad (24)$$

multiplicando por (-1) en ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$-T + m_2 g = m_2 a \quad (25)$$

despejando la T , se obtiene:

$$T = m_2 g - m_2 a \quad (26)$$

4.2.2. Para la masa m_1

En la Fig. 24 se muestra la forma en que se orientó el plano cartesiano. La m_1 se mueve hacia arriba del plano inclinado en la dirección negativa del eje x , pero para que las posiciones no den negativas en las gráficas, se ubicó el plano cartesiano como se muestra en la Fig. 24.

De acuerdo a la Fig. 22 (derecha) se exponen las fuerzas que actúan sobre m_1 , que son: la tensión (que forma un ángulo de $\theta = 180^\circ$ con el $+x$), el peso (que forma un ángulo de $\theta = 300^\circ$ con el $+x$), la fuerza de rozamiento (que forma un ángulo de $\theta = 0^\circ$ con el $+x$) y la normal (que forma un ángulo de $\theta = 90^\circ$ con el $+x$). Aplicando la segunda ley de Newton ($F_x = -m_1 a$), se tiene que la fuerza neta que actúa sobre la m_1 es negativa debido a que se desplaza a lo largo del eje x negativo:

$$N \cos 90^\circ + T \cos 180^\circ + f_k \cos 0^\circ + m_1 g \cos(300^\circ) = -m_1 a \quad (27)$$

$$-T + f_k + m_1 g \cos(300^\circ) = -m_1 a \quad (28)$$

Multiplicando la ec. (28) por (-1) a ambos lados de la igualdad, se tiene:

$$T - f_k - m_1 g \cos(300^\circ) = m_1 a \quad (29)$$

Despejando la T , se obtiene:

$$T = m_1 a + f_k + m_1 g \cos(300^\circ) \quad (30)$$

por definición la fuerza de fricción es: $f_k = \mu_k N$, luego sustituyendo en la ec. (30), se tiene:

$$T = m_1 a + \mu_k N + 0,5 m_1 g \quad (31)$$

igualando las ecuaciones (26) y (31), se obtiene:

$$m_2 g - m_2 a = m_1 a + \mu_k N + 0,5 m_1 g \quad (32)$$

Despejando la aceleración del sistema, se obtiene:

$$a(m_1 + m_2) = -\mu_k N + m_2 g - 0,5 m_1 g \quad (33)$$

$$a = \frac{-\mu_k N + m_2 g - 0,5 m_1 g}{m_1 + m_2} \quad (34)$$

Para determinar la fuerza normal que actúa sobre m_1 , se aplica la primera Ley de Newton, $\sum F_y = 0$, así:

$$N \sin 90^\circ + T \sin 180^\circ + f_k \sin 0^\circ + m_1 g \sin(300^\circ) = 0 \quad (35)$$

$$N + m_1 g \sin(300^\circ) = 0 \quad (36)$$

$$N = 0,86 m_1 g \quad (37)$$

sustituyendo la ecuación (37) en la ecuación (34), se obtiene:

$$a = \frac{-0,86 \mu_k m_1 g + m_2 g - 0,5 m_1 g}{m_1 + m_2} \quad (38)$$

Sustituyendo los valores de $m_1 = 2,35$ kg, $m_2 = 2,65$ kg y $\mu_k = 0,53$ en la ec. (38), se obtiene:

$$a = \frac{-0,86(0,53)2,35 \text{ kg} \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + 2,65 \text{ kg} \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - (0,5)2,35 \text{ kg} \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{2,65 \text{ kg} + 2,35 \text{ kg}} \quad (39)$$

$$a = \frac{-10,49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ kg} + 25,97 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ kg} - 11,51 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ kg}}{5 \text{ kg}} = 0,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Al comparar el valor de la aceleración experimental $a = 0,557 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Tabla 5) con el valor teórico ec. (39) da un error porcentual del $\sim 29,49\%$ debido a que no se tiene en cuenta la fuerza de fricción entre la cuerda y la polea. Con la ec. (9) se determina la fuerza neta: $F_{\text{neto}} = (5 \text{ kg}) \left(0,79 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3,97 \text{ N}$ y con la ec. (11) y multiplicando por $\Delta x = 1,245 \text{ m}$ (Fig.24) se obtiene el trabajo neto: $W_{\text{neto}} = 3,97 \text{ N}(1,245 \text{ m}) = 4,94 \text{ J}$. Este tipo de práctica de laboratorio se realiza en los laboratorios de física mecánica empleando para medir el tiempo un ticometro (equipo que por lo general es importado) y los errores son similares por la misma razón mencionada anteriormente.

4.3 Cálculo de la velocidad final usando el teorema del trabajo y la energía cinética

De acuerdo a la ec. (14) con $n = 2$, se tiene:

$$W_{\text{neto}} = \Delta K_1 + \Delta K_2 \quad (40)$$

Donde, $\Delta K_1 = \left(\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}\right)_1$ es la variación de la energía cinética de la m_1 y $\Delta K_2 = \left(\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}\right)_2$ es la variación de la energía cinética de m_2 , así:

$$W_{\text{neto}} = \left(\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}\right)_1 + \left(\frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}\right)_2 \quad (41)$$

Se despeja v_f , y se obtiene:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m_1 + m_2} \left[W_{\text{neto}} + \frac{(m_1 + m_2)v_i^2}{2} \right]} \quad (42)$$

Sustituyendo la $v_i = 0,715 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Tabla 5) $m_1 + m_2 = 5$ kg, $W_{\text{neto}} = 4,94 \text{ J}$ y $\Delta x = 1,245 \text{ m}$ (Fig. 24), en la ec. (42), se obtiene:

$$v_f^2(x) = \frac{2}{5 \text{ kg}} \left[4,94 \text{ J} + \frac{(5 \text{ kg}) \left(0,51 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}{2} \right] \quad (43)$$

$$v_f^2(x) = \frac{2}{5 \text{ kg}} [4,94 + 1,275] \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$v_f = 1,57 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (44)$$

Tabla 6

Resumen de los cálculos teóricos de la aceleración a , de la fuerza neta F_{neto} , el trabajo neto W_{neto} y la velocidad final (v_f) calculada para $\Delta x = 1,245 \text{ m}$.

	Ángulo de plano inclinado	$a \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$	$F_{\text{neto}} [\text{N}]$	$W_{\text{neto}} [\text{Nm}]$	$v_f \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
Superficie madera-hierro					
$\mu_k = 0.53$	30°	0,79	3,97	4,94	1,57
	45°	0,26	1,31	1,63	0,83
	60°	0,014	0,07	0,087	0,35
Superficie lija-hierro					
$\mu_k = 0.36$	30°	1,46	7,3	9,88	1,90
	45°	0,81	4,05	5,04	1,43
	60°	0,22	1,13	1,40	0,79
Superficie vidrio-hierro					
$\mu_k = 0.23$	30°	3,6	8,11	22,55	3,03
	45°	1,23	6,15	7,65	1,77
	60°	0,70	3,52	4,38	1,35

Fuente: Los autores.

En la tabla 6 se presenta el resumen de los cálculos de la aceleración a , de la fuerza neta F_{neto} , el trabajo neto W_{neto} y la velocidad final v_f obtenidos repitiendo el procedimiento anterior para las superficies lija-hierro y vidrio-hierro, con los ángulos del plano inclinado de 45° y 60°.

4.4 Cálculo del trabajo realizado por la fuerza de fricción para el ángulo del plano de 30° y la superficie madera – hierro

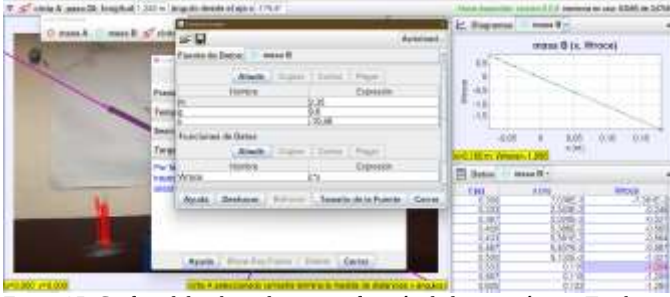


Figura 25. Grafica del trabajo de roce en función de la posición con Tracker.
Fuente: Los autores



Figura 26. Grafica del trabajo de roce en función de la posición con Tracker.
Fuente: Los autores.

Para obtener el valor de la velocidad final usando la ley de la conservación de la energía, primero se determina el trabajo realizado por la fuerza de fricción que actúa sobre m_1 , la cual es $W_{roce} = -f_K(\Delta x)$, donde $f_K = \mu_k N$ y la normal corresponde a la ec. (37), así:

$$W_{roce} = -0,86\mu_k m_1 g(\Delta x) \quad (45)$$

$$W_{roce} = -0,86(0,53)(2,35 \text{ kg})\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\Delta x)$$

por lo tanto, W_{roce} en función de la posición, es:

$$W_{roce} = [-10,49 (\Delta x)] \text{ J} \quad (46)$$

Se agregó la ec. (46) en la “herramienta de magnitudes” de Tracker (Fig. 25) para obtener la gráfica de W_{roce} en función de la posición Fig. (26).

La Fig. 26 muestra que el W_{roce} aumenta negativo a medida que el sistema se mueve en dirección contraria a las manecillas del reloj. El negativo del trabajo indica que el que el campo gravitacional realiza trabajo sobre el sistema y esta se convierte en energía térmica que es la que se produce entre la masa y el plano inclinado.

4.5 Cálculo de la velocidad final usando la ley de la conservación de la energía mecánica con el ángulo del plano de 30° y la superficie madera – hierro

Después de calcular W_{roce} , procedemos a usar la ley de la conservación de la energía para determinar la v_f . Para ello

pintamos la posición inicial y final que corresponde a la ubicación que tienen las masas antes y después de desplazarse $\Delta x = 1.245 \text{ m}$. Esto con el fin de definir la energía potencial y cinética, en cada posición (Fig.27).

De acuerdo a la ec. (20) con $n = 2$, se tiene:

$$W_{roce} = \Delta E_1 + \Delta E_2 \quad (47)$$

Donde ΔE_1 es el cambio de la energía mecánica de m_1 y ΔE_2 es el cambio de la energía mecánica de la m_2 , así:

$$W_{roce} = [(K_f + mgh_f) - (K_i + mgh_i)]_1 + [(K_f + mgh_f) - (K_i + mgh_i)]_2 \quad (48)$$

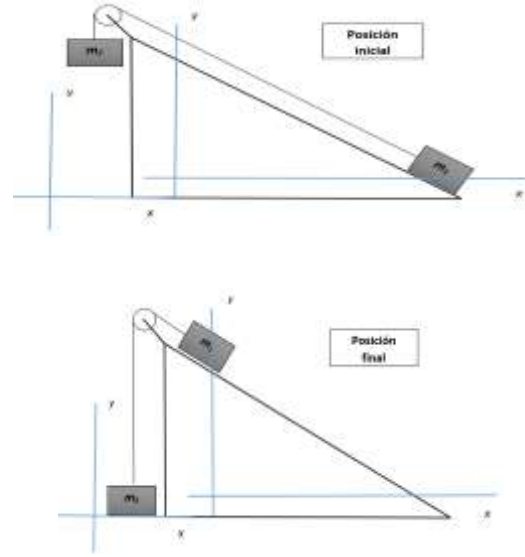


Figura 27. Posiciones: a) iniciales y b) finales de cada uno de los bloques
Fuente: Los autores.

De acuerdo a la Fig.27 se define la $E_{pi} = m_1 gh_i = 0$ y la $E_{pf} = m_2 gh_f = 0$, la cual nos queda:

$$W_{roce} = [(K_f + mgh_f) - K_i]_1 + [K_f - (K_i + mgh_i)]_2 \quad (49)$$

organizando términos, se tiene que:

$$W_{roce} = \left(\frac{m_1 v_f^2}{2} + \frac{m_2 v_f^2}{2}\right) - \left(\frac{m_1 v_i^2}{2} + \frac{m_2 v_i^2}{2}\right) + (mgh_f)_1 - (mgh_i)_2 \quad (50)$$

Factorizando $\frac{v_f^2}{2}$ y la $\frac{v_i^2}{2}$, se tiene que:

$$W_{roce} = \frac{v_f^2}{2}(m_1 + m_2) - \frac{v_i^2}{2}(m_1 + m_2) + (mgh_f)_1 - (mgh_i)_2 \quad (51)$$

despejando la v_f^2 , así:

$$\frac{v_f^2}{2}(m_1 + m_2) = W_{roce} + \frac{v_i^2}{2}(m_1 + m_2) - (mgh_f)_1 + (mgh_i)_2 \quad (52)$$

$$v_f^2 = \frac{2}{m_1 + m_2} \left[W_{roce} + \frac{v_i^2}{2} (m_1 + m_2) - (mgh_f)_1 + (mgh_i)_2 \right] \quad (53)$$

Sustituyendo los valores de $\Delta x = 1,245$ m (Fig. 24), $h_{f1} = 1,245 \sin 30^\circ = 0,62$ m (Fig. 27); así como $m_1 = 2,35$ kg, $m_2 = 2,65$ kg y $v_i = 0,715 \frac{m}{s}$ (Tabla 5) se sustituye la ec. 53, se obtiene:

$$v_f^2 = \frac{2}{5kg} \left(-10,49 (1,245m) - (2,35kg) \left(9,8 \frac{m}{s^2} \right) (0,62 m) + (2,65kg) \left(9,8 \frac{m}{s^2} \right) (1,245 m) + \frac{5kg \left(0,715 \frac{m}{s} \right)^2}{2} \right)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{5kg} (-13,06 J - 14,28 J + 32,33 J + 1,28 J)}$$

$$v_f = \sqrt{0,40 \frac{1}{kg} (6,27) kg \frac{m^2}{s^2}} = 1,58 \frac{m}{s} \quad (54)$$

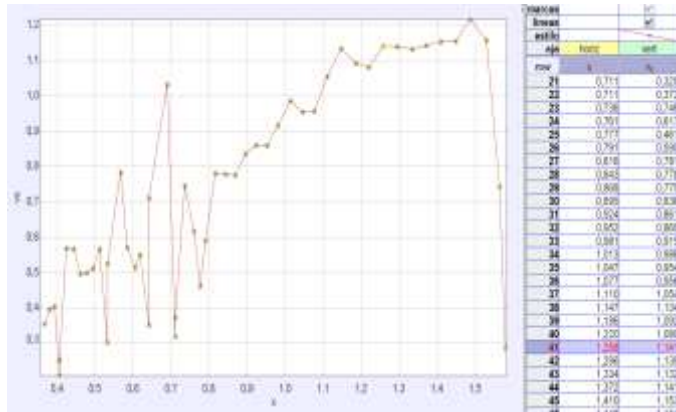


Figura 28. Gráfica y su respectivo ajuste de velocidad en función del tiempo para el ángulo de 30° , entre las superficies madera-hierro.
Fuente: Los autores.

Tabla 7

Resumen de los datos teóricos y experimentales de la velocidad final (v_f) usando el teorema del trabajo-energía cinética y usando la ley de la conservación de la energía mecánica de la superficie madera-hierro para 30° para $\Delta x = 1.245$ m.

Resultados usando el teorema del trabajo y la energía		
	Δx [m]	v_f [$\frac{m}{s}$]
Experimental	1,245	~1,26
Teórico	1,296	1,57
Resultados usando la ley de la conservación de la energía mecánica		
	Δx [m]	v_f [$\frac{m}{s}$]
Experimental	1,245	~1,26
Teórico	1,296	1,58

Fuente: Los autores.

En la Fig. 28 muestra la velocidad final en función de la posición del sistema y la Tabla 7 indica que la velocidad final calculada teóricamente con el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de conservación de la energía mecánica son iguales. Pero al comparar los datos teóricos con los datos

experimentales el error es de $\sim 3,93$ % debido a que no se tiene en cuenta la fuerza de fricción entre la polea y la cuerda.

4.6 Cálculos experimentales de las energías para el ángulo del plano de 30° y la superficie madera-hierro

En esta sección se obtienen las gráficas de las energías cinética y potenciales en cada una de las masas.

4.6.1 Graficas de energía cinética y potencial en función de la posición vertical (Δy) para la masa uno (m_1)

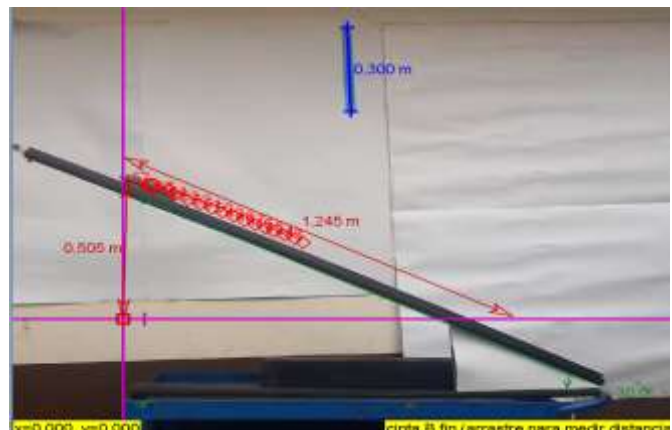


Figura 29. Ubicación del plano cartesiano para definir la gráfica de la energía potencial gravitacional en Tracker para m_1 y m_2 .
Fuente: Los autores.

En la Fig.29 se muestra la ubicación del plano cartesiano para obtener los datos de las energías K y E_p de la m_1 para ser posteriormente ser graficadas en Excel como se muestra en la Fig.30.

En la Fig.30 se observa que las gráficas de la energía cinética y potencial aumentan al incrementarse la altura. Por lo que la suma de K y E_p no es una constante debido a la fuerza de fricción entre la m_1 y el plano inclinado y entre la polea y la cuerda, esta diferencia de energía es compensada con la energía térmica que se genera entre la m_1 y el plano inclinado.

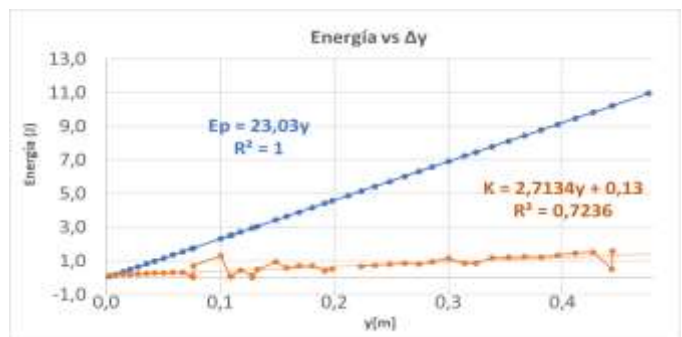


Figura 30. Gráficas correspondientes de las energías K y E_p de la masa m_1 .
Fuente: Los autores.

4.6.2 Graficas de energía cinética y potencial en función de la posición vertical (Δy) para la masa dos (m_2)

La ubicación del plano cartesiano para obtener los datos de las energías K y E_p de la m_2 que es la misma que se utilizó para

la masa m_1 se exhibe en la Fig.29. Mientras en la Fig.31 se muestra las energías en función de la posición para la masa m_1 . Donde se observa que la E_p aumenta y la K disminuye, pero no en la misma proporción, al igual que en la masa m_1 , la energía no se conserva debido al W_{roce} de la masa m_1 .

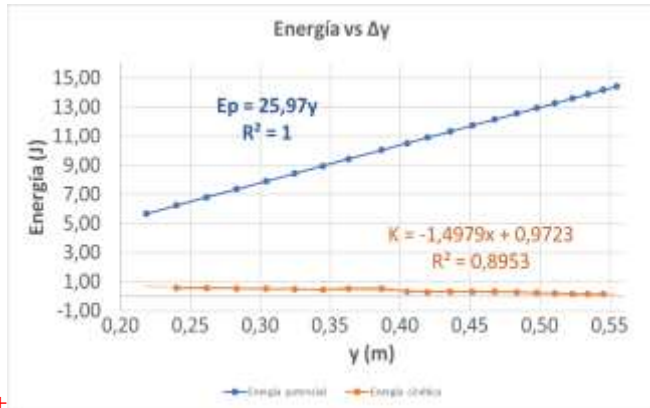


Figura 31. Gráficas correspondientes de las energías K y E_p de la masa m_2 .
Fuente: Los autores

5 Sistema de una masa unida a un resorte

El estudio del comportamiento físico-matemático del sistema masa-resorte se realiza en todos los cursos de física para ingenieros, debido a que el movimiento de este sistema está asociado a los movimientos: circular, ondulatorio y oscilatorio que son temáticas fundamentales para el desarrollo de otros cursos como lo es, el de física moderna donde se estudia el comportamiento ondulatorio del electrón. Después de presentar el ¿por qué? es importante estudiar el sistema masa-resorte se procede a explicar la parte teórica que se obtiene de los textos al respecto ([1], pp. 440; [10], pp. 47). Luego se procede hacer el diseño y construcción con los materiales antes mencionados y finalmente se empezó a realizar el video. Cabe notar que el montaje experimental fue realizado con materiales caseros teniendo presente que en su construcción el resorte no excediera en su elongación la longitud del plano inclinado; los resultados son los que plantean a continuación.

5.1 Cálculo de la posición en función del tiempo de un sistema masa-resorte críticamente amortiguado

La Fig.32 muestra la variación de la elongación en función del tiempo del sistema masa-resorte. Donde se observa que la masa realiza media oscilación como máximo antes de disminuir la amplitud a cero. Es decir, la masa tiende a regresar rápidamente a su posición de equilibrio. Por lo tanto, la ecuación de la variación de la elongación de la masa de hierro de 2,35 kg en función del tiempo, es [10]:

$$x(t) = \left[\left(v_i + \frac{b}{2m} x_i \right) t \right] e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (55)$$

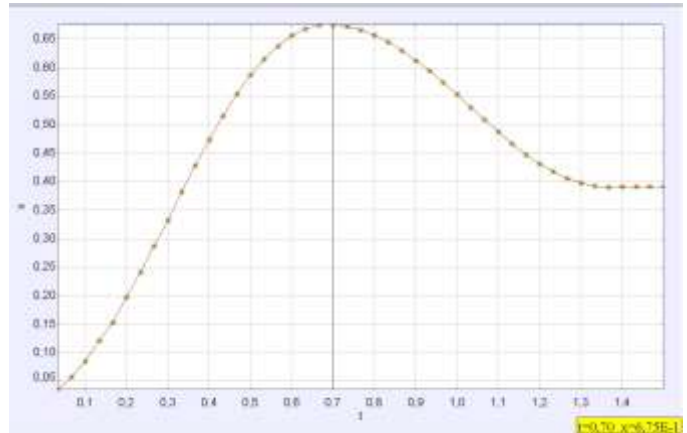


Figura 32. Variación con el tiempo de la elongación de un oscilador amortiguado crítico para 60° en la superficie madera-hierro.
Fuente: Los autores.

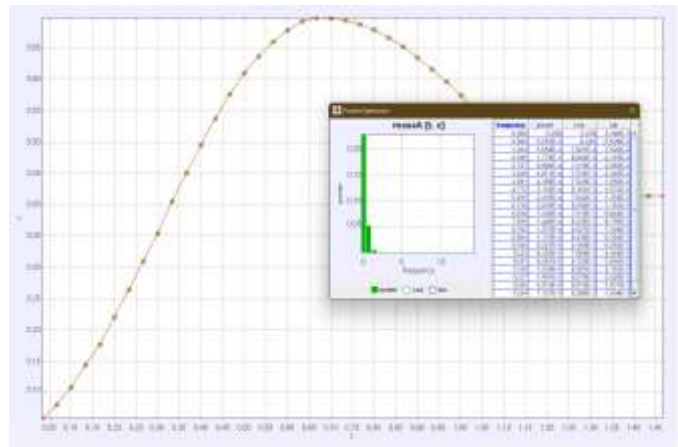


Figura 33. Espectro de Fourier para 60° en la superficie madera-hierro.
Fuente: Los autores.

Por definición la frecuencia angular de oscilador del sistema es [11]:

$$w^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (56)$$

Como el sistema es un oscilador crítico se tiene que $w^* = 0$ por lo tanto:

$$\frac{k}{m} = \frac{b^2}{4m^2} \quad (57)$$

La velocidad angular del resorte se define como:

$$w^2 = \frac{k}{m} \quad (58)$$

Con la Fig. 33 se obtiene la frecuencia del oscilador extraído de Tracker ($f = 0,32$ Hz) y con este valor se obtiene la velocidad angular del oscilador [11], la cual es:

$$w = 2\pi f = 2(3,12 \text{ rad}) \left(0,32 \frac{1}{s} \right) = 2 \frac{\text{rad}}{s} \quad (59)$$

Con la ec. (59) se obtiene la constante elástica, así:

$$k = mw^2 = (2,35 \text{ kg}) \left(2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 = 9,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \quad (60)$$

Con el valor de la constante elástica (ec. (60)) se calcula la constante de amortiguamiento. En el diseño de ingeniería, esto es a menudo una propiedad deseable [11].

$$b = 2\sqrt{km} \quad (61)$$

$$b = 2 \sqrt{\left(9,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right) (2,35 \text{ kg})} = 9,45 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad (62)$$

Sustituyendo las condiciones iniciales: posición y la velocidad inicial se toma en un tiempo de $t_i = 0,06 \text{ s}$, así: $x_i = 0,08 \text{ m}$, $v_i = 0,742 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ respectivamente obtenidos de la Fig.32 y $b = 9,45 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ en la ec. (62), se obtiene:

$$x(t) = \left[0,08 \text{ m} + \left(0,742 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \frac{9,45 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}{2(2,35 \text{ kg})} (0,08 \text{ m}) \right) t \right] e^{-2t} \quad (63)$$

por lo tanto, la posición en función del tiempo, es:

$$x(t) = [0,08 \text{ m} + 0,16t] e^{-1,19t} \quad (64)$$

5.2 Cálculo teórico de la $a_{\text{máx}}$, $v_{\text{máx}}$, $F_{\text{máx}}$ y W_{neto} entre $x_f = 0,08 \text{ m}$ y $x_f = 0,710 \text{ m}$ en $t = 0,7 \text{ s}$

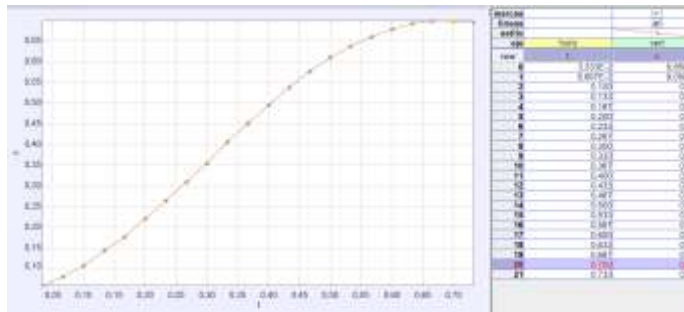


Figura 34. Grafica de elongación en función del tiempo desde $x_i = 0,08 \text{ m}$ hasta $x_f = 0,710 \text{ m}$ en la superficie madera-hierro.
Fuente: Los autores.

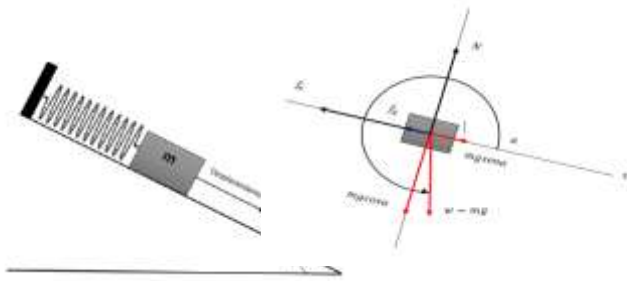


Figura 35. Dibujo donde muestra el desplazamiento de la masa (izquierda) y dibujo donde se muestra el diagrama de cuerpo libre para la masa.
Fuente: Los autores.

El Cálculo teórico de la $a_{\text{máx}}$, $v_{\text{máx}}$, $F_{\text{máx}}$ y W_{neto} fueron calculadas en $x_f = 0,710 \text{ m}$ Fig. (36).

La dirección del sistema masa-resorte se muestra en la Fig. 35 (izquierda); de otra parte, en la Fig. 36 se indica la forma en que se ubicó el plano cartesiano en Tracker para la toma de datos y en la Fig. 35 (derecha) se muestran las fuerzas que actúan sobre la masa; las cuales son [11]:

La fuerza de rozamiento (que forma un ángulo de $\theta = 180^\circ$ con el $+x$), el peso (que forma un ángulo de $\theta = 330^\circ$ con el $+x$), la fuerza normal (que forma un ángulo de $\theta = 90^\circ$ con el $+x$) y la fuerza elástica (que forma un ángulo de $\theta = 180^\circ$ con el $+x$).

De acuerdo a lo anterior, aplicando la segunda ley de Newton y sumando las componentes de las fuerzas horizontales se tiene que $F_{\text{neta}} = \sum F_x = ma_x$, donde la fuerza neta se toma positiva debido a que el sistema se desplaza a lo largo del eje x positivo, así:

$$N \cos 90^\circ + mg \cos(330^\circ) + F_e \cos(180^\circ) + f_k \cos(180^\circ) = ma \quad (65)$$



Figura 36. Desplazamiento máximo del sistema masa-resorte
Fuente: Los autores

Despejando la aceleración, se tiene:

$$a = \frac{0,86mg - F_e - f_k}{m} \quad (66)$$

Sustituyendo la fuerza de fricción $f_k = \mu_k N$ y la fuerza elástica es $F_e = k(\Delta x)$ en la ec. (66), se obtiene:

$$a = \frac{0,86mg - k(\Delta x) - \mu_k N}{m} \quad (67)$$

Para determinar la fuerza normal aplicamos la primera ley de Newton, sumando las componentes de la fuerza vertical e igualándolas a cero $\sum F_y = 0$, así:

$$N \sin 90^\circ + mg \sin(330^\circ) + F_e \sin(180^\circ) + f_k \sin(180^\circ) = 0 \quad (68)$$

la cual se obtiene:

$$N = 0,5mg \quad (69)$$

Sustituyendo la ec. (69) en ec. (67), obtenemos la aceleración del sistema masa-resorte cuando se desplaza desde $x_i = 0 \text{ m}$ hasta $x_f = 0,694 \text{ m}$.

$$a = \frac{0,86mg - k(x) - \mu_k 0,5mg}{m} \quad (70)$$

Sustituyendo los valores de $m = 2,35 \text{ kg}$, $k = 9,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ (ec. (60)), el coeficiente de fricción cinético, $\mu_k = 0,53$ [8] y $x = 0,710 \text{ m}$, en la ec. (70), se obtiene:

$$a = \frac{0,86(2,35 \text{ kg}) \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - \left(9,5 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}\right)(0,710 \text{ m}) - (0,53)0,5(2,35 \text{ kg}) \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{2,35 \text{ kg}}$$

operando, así:

$$a = \frac{19,80 - 6,74 - 6,10 \text{ m}}{2,35 \text{ s}^2} = 2,96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (71)$$

por lo tanto, la fuerza en $x = 0,710 \text{ m}$, es:

$$F = (2,35 \text{ kg}) \left(2,96 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 6,96 \text{ N} \quad (72)$$

Por lo tanto, el trabajo en $x = 0,710 \text{ m}$, es:

$$W_{\text{neto}} = (6,96 \text{ N}) 0,710 \text{ m} = 4,94 \text{ J} \quad (73)$$

5.3 Cálculo de las energías del sistema masa-resorte amortiguado

5.3.1 Cálculo de la energía cinética y de la energía potencial elástica

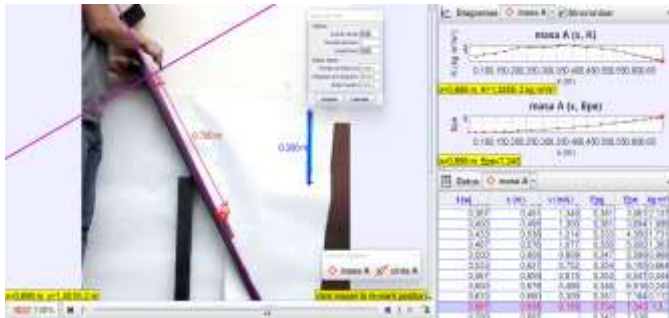


Figura 37. Ubicación del plano cartesiano para definir la gráfica de la energía potencial elástica en Tracker entre $0,08 < x(m) < 0,710$

Fuente: Los autores.

La energía del sistema masa-resorte que describe una oscilación amortiguada; es la suma de la energía cinética, la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica, por lo tanto:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(\Delta y) \quad (74)$$

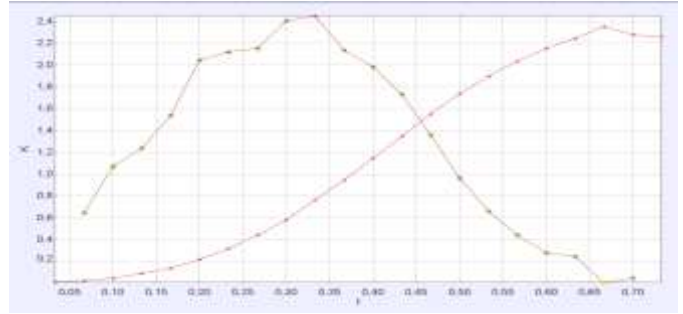


Figura 38. Gráfica de la energía cinética y potencial elástica entre $0,078 < x(m) < 0,701$

Fuente: Los autores.

En las Fig. 37-38 se muestran las gráficas de la energía cinética y de la energía potencial elástica, donde se pudo observar que:

- Valores de las energías en la posición y momento en que se suelta la masa ($x = 0,012 \text{ m}$ y $t = 0,067 \text{ s}$) son: la energía cinética $K = 0,647 \text{ J}$ y la potencial elástica $E_{pe} = 0,00068 \text{ J}$.
- Valores de las energías en la posición y momento que la energía cinética toma un valor máximo ($x = 0,337 \text{ m}$ y $t = 0,333 \text{ s}$): la energía cinética máxima, $K_{\text{máx}} = 2,452 \text{ J}$ y la energía potencial elástica, $E_{pe} = 0,539 \text{ J}$ ([1] pp. 429).
- Valores de las energías en la posición y momento cuando el resorte está en su máxima elongación ($x = 0,710 \text{ m}$ y $t = 0,7 \text{ s}$) son: la energía cinética $K = 0 \text{ J}$ y la potencial elástica $E_{pe} = 1,877 \text{ J}$.
- Valores de las energías en la posición y momento cuando hay un cruce entre las dos figuras ($x = 0,559 \text{ m}$ y $t = 0,454 \text{ s}$): la energía cinética, $K = 1,488 \text{ J}$ y la energía potencial elástica, $E_{pe} = 1,494 \text{ J}$

5.3.2 Cálculo de las energías cinética y potencial gravitacional

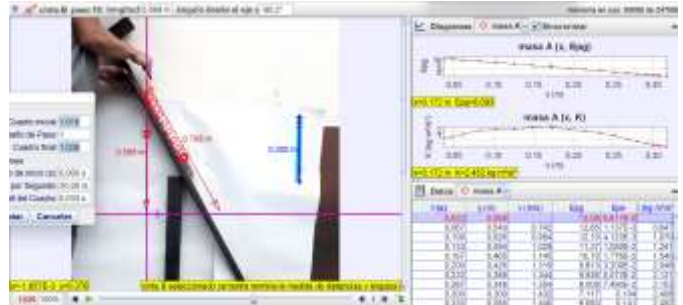


Figura 39. Ubicación del plano cartesiano para definir la gráfica de la energía potencial gravitacional en Tracker, la posición vertical entre $0,009 < y(m) < 0,568 \text{ m}$

Fuente: Los autores.

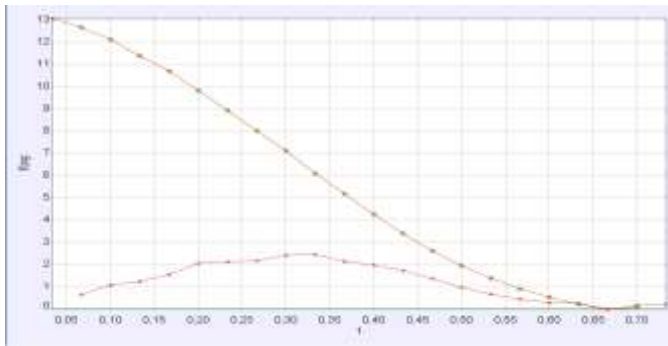


Figura 40. Gráfica de la energía cinética y potencial gravitacional entre $0,078 < x(m) < 0,694$
Fuente: Los autores.

En las Fig. 39-40 se muestran las gráficas de la energía cinética y potencial gravitacional, donde se pudo observar que:

- Valores de las energías en la posición y momento en que se suelta la masa ($y = 0,568 \text{ m}$ y $t = 0,033 \text{ s}$) son: la energía cinética $K = 0 \text{ J}$ y la potencial elástica $E_{pg} = 13,08 \text{ J}$.
- Valores de las energías en la posición y momento que la energía cinética toma un valor máximo ($y = 0,265 \text{ m}$ y $t = 0,333 \text{ s}$): la energía cinética máxima, $K_{\text{máx}} = 2,452 \text{ J}$ y la energía potencial elástica $E_{pg} = 6,093 \text{ J}$.
- Valores de las energías en la posición y momento cuando el resorte está en su máxima elongación ($y = 0,710 \text{ m}$ y $t = 0,7 \text{ s}$) son: la energía cinética $K = 0 \text{ J}$ y la potencial elástica $E_{pg} = 0,208 \text{ J}$.
- Valores de las energías en la posición y momento cuando se cruzan las dos gráficas ($y = 0 \text{ m}$ y $t = 0,667 \text{ s}$) son: la energía cinética $K = 0,007 \text{ J}$ y la potencial elástica $E_{pg} = 0 \text{ J}$.
- No es posible realizar las tres graficas en un solo plano cartesiano, debido a que la energía potencial elástica es directamente proporcional a desplazamiento horizontal, mientras que la energía potencial gravitacional es directamente proporcional al desplazamiento vertical.

Tabla 8
Resumen de los valores de las energías: cinética, potencial elástico y potencial gravitacional

posición (m)	Energía Mecánica		
	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg(\Delta y)$		
Inicial	0,647	0,00068	13,08
punto de equilibrio	2,452	1,57	6,093
final	0	1,877 J	0,208
punto de encuentro	1,488	1,494	
punto de encuentro	0,007		0

Fuente: Los autores.

El resumen de las posiciones iniciales, del punto de equilibrio y de la posición final se denota en la tabla 8. El punto de encuentro que se muestra en las Fig. 38 y Fig. 40 donde indica que el sistema parte con una energía cinética y potencial gravitacional, luego en el punto de equilibrio la energía es cinética y potencial gravitacional para finalmente convertirse en potencial elástica y potencial gravitacional. Aquí se muestra que la energía mecánica no se conserva debido al trabajo

realizado por la fuerza de fricción entre las superficies hierro-madera.

6. Conclusiones

En este trabajo fue descrito como a partir de tres experimentos caseros se realiza el cálculo de las ecuaciones de movimiento: la aceleración, la fuerza neta, el trabajo neto y el cálculo de la velocidad final utilizando el teorema del trabajo-energía y la ley de la conservación de la energía.

En el primer experimento se obtuvo que al aumentar el ángulo del plano inclinado aumenta el valor de la aceleración debido a que la fuerza normal y la fuerza de fricción disminuyen.

Además, al calcular la velocidad final utilizando el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de la conservación de la energía mecánica, y compararlos con el valor experimental, da como resultado un error relativo porcentual de $\sim 0,57\%$ y $\sim 0,99\%$, respectivamente.

Asimismo, al graficar la energía en función de la posición se observó que los valores de la energía potencial son mucho mayores que los valores de la energía cinética al desplazarse la masa sobre el plano inclinado; mostrando que la energía mecánica no se conserva debido a la fuerza de fricción.

Cabe advertir que los errores obtenidos en esta práctica son los mismos que se presentarían si este experimento se realizara en el laboratorio de física mecánica con montajes más elaborados (importados). En el desarrollo de esta práctica de laboratorio no se realiza la comparación entre los cálculos teóricos y los cálculos experimentales. Sino que se utilizan los datos experimentales para sustituirlos en las ecuaciones que se muestran en los textos y obtener las variables que exige el taller planteado por el docente.

En el segundo experimento se observó que en las gráficas de posición en función del tiempo la concavidad de las curvas aumenta al incrementarse el ángulo del plano inclinado y disminuye el valor de la aceleración en las superficies lija-hierro. Lo anterior, no ocurre para las otras dos superficies, donde se puede decir que la aceleración es casi constante.

Al calcular la velocidad final con el teorema del trabajo-energía cinética y la ley de la conservación de la energía mecánica y comparar los valores; estos fueron similares, pero al comparar éstos con los valores experimentales el error fue muy grande debido a que se desprecia la fuerza de fricción entre la polea y la cuerda. Al igual que en el experimento anterior muestra las gráficas de energía en función de la posición se observa que la energía mecánica no se conserva debido a la fuerza de fricción.

Esta experiencia tradicionalmente no se realiza o desarrolla en el laboratorio de física mecánica, sino que solo se plantea como un ejercicio de clase, como ejemplo para explicar movimientos de masas unidas por una cuerda inextensible y determinar lo que aquí se desarrolla.

El sistema masa-resorte se considera como un oscilador críticamente amortiguado, y al utilizarlo conjuntamente con Tracker se pudo calcular: la frecuencia, la velocidad angular, la constante de amortiguamiento y la posición en función del

tiempo. Para calcular la velocidad, la aceleración y fuerza máximas se limitó el desplazamiento de $0,08 < x(m) < 0,710$.

Además, se realizaron las gráficas de la energía cinética (K) y la energía potencial gravitacional (E_{pg}) adicionando las gráficas de K y energía potencial elástica (E_{pe}) debido a que la eE_{pg} es directamente proporcional al Δy y E_{pe} y directamente proporcional al Δx .

Realizando las tres experiencias se observó que el cálculo de la fuerza de fricción es fundamental para el cálculo de la aceleración y de las energías; esto se evidenció al compararse los cálculos teóricos con los datos que suministrados por Tracker. Esto refleja la importancia que tiene la aplicación del software Tracker en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de la física.

Finalmente, se demuestra en este trabajo como se puede calcular la aceleración o la velocidad final utilizando las ecuaciones de la cinemática, la dinámica o el teorema del trabajo-energía cinética o la ley de la conservación de la energía mecánica.

Esta práctica se realiza en los laboratorios de física en general con montajes más elaborados pero que por lo general son importados y muy costosos que no todas las universidades pueden adquirir y se obtienen los mismos conceptos que se desarrollaron en este trabajo; que al igual que en el primer experimento no se comparan los cálculos teóricos con los cálculos experimentales, sino que los estudiantes desarrollan una guía planteada por el docente.

En este trabajo, al igual que muchos otros, se ha probado la necesidad de cambiar las prácticas académicas para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la física mecánica, debido a que se ha demostrado que los estudiantes adquieren una mayor invención, creatividad, autonomía en la adquisición de conceptos de la física mecánica realizando proyectos de clase apoyados de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) [12], [13], [14], [15], [16].

Referencias

- [1] S. Zemansky y R. A. Freedman, Física Universitaria, Pearson Educación, vol. 1, 2009.
- [2] R. A. Serway, Física, Mc Graw-Hill, 1996.
- [3] G. P. Abdel Rahim G, Conceptos básicos de física mecánica, Fondo de publicaciones de la Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas, 2015. [En línea]. Disponible en: <https://editorial.udistrital.edu.co/detalle.php?id=80&f=6>
- [4] R. Díaz. y G. Á. García, «La enseñanza de la energía cinética a través de juguetes tradicionales y la modelación en el bachillerato en México,» Edutec, n° 72, pp. 88-111, 2020. DOI: <https://doi.org/10.21556/edutec.2020.72.1559>
- [5] G. P. Abdel Rahim G y M. Villate, «Cálculo de las ecuaciones del movimiento parabólico usando Tracker,» rev.digit.educ.ing, vol. 17, n° 33, pp. 45-51, 2021. [En línea]. Disponible en: <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/1183/1031>
- [6] D. Brown, «Tracker,» 2022. [En línea]. Available: <https://physlets.org/tracker/>. [Último acceso: 11 07 2022].
- [7] M. Hohenwarter, «GeoGebra,» Gladys Patricia Abdel Rahim Garzón, [En línea]. Disponible en: <https://www.geogebra.org/u/garahimg>. [Último acceso: 11 07 2022].
- [8] G. P. Abdel Rahim G y M. Villate, «Determinación del coeficiente de fricción dinámico con Tracker,» Lat. Am. J. Phys. Educ., vol. 16, n° 1, pp. 1303-1 - 1303-9. [En línea]. Disponible en: http://www.lajpe.org/mar22/16_1_03.pdf
- [9] M. Sánchez y J. Antonio, «Tracker»: Una herramienta para el Análisis y Modelado del Movimiento de Objetos en el Laboratorio de Dinámica,» 2018. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.iberopuebla.mx/handle/20.500.11777/3822>
- [10] M. Olmo y R. Nave, «Amortiguación Crítica», [En línea]. Disponible en: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/oscda2.html> [Último acceso: 11 07 2022].
- [11] G. P. Abdel Rahim G, «Conceptos básicos de vibraciones y ondas», Fondo de publicaciones de la Univ., Distrital Francisco José de Caldas, 2015. [En línea]. Disponible en: <https://editorial.udistrital.edu.co/detalle.php?id=81&f=6>
- [12] G. Fonseca y H. Bayardo, Implementación del programa tracker como herramienta de análisis en algunas situaciones de cinemática y dinámica en dos dimensiones, aplicando el método de aprendizaje activo, Tesis de MSc, Fac. Ciencias. Univ., Nacional de Colombia, Bogotá, 2016 Disponible en: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56453>
- [13] S.P Muñoz, «Análisis de las dificultades en la comprensión de la cinemática en Bachillerato. Evaluación del uso de Tracker para facilitar el aprendizaje», Tesis de MSc, Fac. Edu. Univ., Internacional de la Rioja, Barcelona, 2014. [En línea]. Disponible en: <https://reunir.unir.net/handle/123456789/2719>
- [14] V.J. López R y V. Árias G, «Aporte de una propuesta de enseñanza basada en aplicaciones móviles, para el aprendizaje del movimiento pendular y sistema masa resorte: Estado del arte», Lat. Am. J. Sci. Educ, vol.6, pp. 22003, 2019. [En línea]. Disponible en: http://lajse.org/nov19/2019_22003_2.pdf
- [15] J.E. Escalante M, J.R. Laguna C, J.F. Gómez A, C. Calderón R, «Análisis Del coeficiente de amortiguamiento viscoso en un sistema masa-resorte-Amortiguador utilizando PPLANE y GEOGEBRA,» Revista Mexicana De Física E, vol 62, pp. 66-72, 2016.
- [16] D.C. Díaz y F.C. Vitery, «Análisis de videos y modelado de sistemas físicos sencillos como estrategia didáctica» Lat. Am. J. Phys. Educ, vol.9, n° 18, pp. 190 - 200, 2014. [En línea]. Disponible en: <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/464>

G.P. Abdel Rahim Garzón es Licenciada en Física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1997), obtuvo su título de Especialista en Ciencias Físicas (2002) y de Maestría en Ciencias Físicas (2006) en el Departamento de Física de la Universidad Nacional de Colombia y en 2016 obtuvo el título de Doctorado en Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, con Tesis Meritoria. Es profesora titular de física de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, ha realizado estudios de investigación en nuevos materiales de las propiedades estructurales y electrónicas a partir de métodos ab-initio y estudios en la caracterización de superficies semiconductoras y su modificación con la adsorción de átomos metálico. Además ha desarrollado e incorporado material didáctico basada en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) para la enseñanza de la física.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8620-7023>

M.A. Moreno Villate. Estudiante de tecnología en electricidad de media y baja tensión de la Facultad Tecnológica en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4247-2623>