

Experimentación con espuma de cerveza para la enseñanza del Método de Mínimos Cuadrados en un curso de Álgebra Lineal

Viviana Angélica Costa

IMAPEC, Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina.
vacosta@ing.unlp.edu.ar

Resumen— En este trabajo se describe una actividad didáctica implementada en un curso de matemática donde se estudian contenidos de Álgebra Lineal con estudiantes de ingeniería. Dicha actividad, comienza con una pregunta que lleva a los estudiantes investigar la relación entre la variación del volumen de la espuma de la cerveza en relación al tiempo, vinculado con el proceso de decaimiento exponencial. El marco teórico se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que propone acercarse hacia el Paradigma del Cuestionamiento del Mundo con el objetivo de enfrentar el problema de la desarticulación de contenidos, del monumentalismo de los saberes y de la ausencia de la modelización matemática. Se implementa una metodología de investigación descriptiva que permite mostrar que la actividad didáctica es viable, sumado a que los estudiantes construyen temas de Álgebra Lineal de una forma distinta a la convencional. Como conclusión, los estudiantes desarrollan tareas vinculadas con: el método científico, el registro de datos experimentales, la construcción de un modelo matemático, el uso del *software* GeoGebra y la re-significación de resultados para un problema real.

Palabras Clave— Álgebra Lineal, mínimos cuadrados, didáctica, ingeniería, educación matemática, decaimiento exponencial.

Recibido: 18 de septiembre de 2022. Revisado: 31 de octubre de 2022.
Aceptado: 28 de noviembre de 2022.

Study and Research Activity in a Linear Algebra course

Abstract— This work describes a didactic activity implemented in a Linear Algebra mathematics course, with engineering students. This activity begins with a question that leads students to investigate the relationship between the variation of the volume of beer foam in relation to time, linked to the process of exponential decay. The theoretical framework is based on the Anthropological Theory of the Didactic, which proposes approaching the Paradigm of Questioning the World with the aim of facing the problem of the disarticulation of content, the monumentalism of knowledge and the absence of mathematical modeling. A descriptive research methodology was implemented that allows showing that the didactic activity is viable, in addition to the fact that students build Linear Algebra topics in a different way than the conventional one. As a conclusion, the students develop tasks related to: the scientific method, the recording of experimental data, the construction of a mathematical model, the use of the GeoGebra software and the re-signification of results for a real problem.

Keywords— Linear Algebra, least squares, didactics, engineering, mathematical education, exponential decay.

1 Introducción

En este trabajo se describe la implementación de una actividad didáctica basada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico que tiene por objetivo proponer a los estudiantes un modo diferente de construir los objetos matemáticos, desde la investigación y del cuestionamiento del mundo.

Dicha actividad se presenta a grupos de estudiantes en cursos de matemática donde se estudian contenidos de Álgebra Lineal en una facultad de ingeniería.

El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que se interesa por el estudio de objetos como matrices, vectores, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales, entre otros. Esos conceptos son herramientas fundamentales en la resolución de diversos problemas, en particular en ingeniería, ya que permiten modelar diversos fenómenos [1] [2] [3]. Por ello, tales contenidos están presentes en los cursos básicos de matemática de todas las especialidades de la ingeniería.

La actividad didáctica propuesta se inicia con el siguiente desafío: *Seleccionar dos marcas de cerveza que se encuentren a la venta en Argentina e intentar responder a la pregunta: ¿Cuál recomendarías y por qué?* El propósito es que mediante la experimentación e investigación los estudiantes construyan contenidos relativos al Álgebra Lineal. En particular: la proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial, el Método de Mínimos Cuadrados y el ajuste de curvas, además de trabajar el álgebra matricial y el uso de un *software* de geometría dinámica. La pregunta del desafío fue inspirada en los trabajos de Leike [4] que prueba la ley de decaimiento exponencial de la espuma de la cerveza, y de Gil y Laccio [5] que proponen un conjunto de experimentos (entre ellos el estudio del decaimiento exponencial de la espuma de la cerveza) basados en el aprendizaje por inmersión o indagación, que incorporan el teléfono celular inteligente (*smartphones*) y un equipamiento básico, de muy bajo costo, para realizarlos.

En lo que sigue, se mencionan aspectos básicos del marco teórico, la metodología utilizada para llevar adelante la experimentación e investigación, la descripción de la actividad didáctica, los resultados obtenidos y finalmente se presentan conclusiones.

2 Marco teórico

La investigación se basa en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) presentada por Yves Chevallard [4] que propone para la enseñanza de la matemática un cambio radical, pasando del Paradigma de Visitar Obras (PVO) al Paradigma del Cuestionamiento del Mundo (PCM).

El PVO se caracteriza por considerar a los temas matemáticos a estudiar como si fuesen obras acabadas, cerradas, monumentos por visitar que no se pueden manipular, para las que ha desaparecido la situación problemática que les ha dado origen, así como también toda posibilidad de cuestionamiento de estas.

En cambio, la PCM propone organizar el estudio de los contenidos a partir de preguntas (y no de respuestas como ocurre en la educación tradicional) que recuperen el sentido que las originaron, propiciando la formación de estudiantes cuestionadores, críticos, que se animen a hacer preguntas y a buscar sus respuestas [7]. Esto último, además contribuiría en la formación de las habilidades blandas (competencias conductuales como el liderazgo, la empatía, la ética, la proactividad, el pensamiento crítico, el trabajo en equipo, entre otras) consideradas importantes para un ingeniero [8].

2.1 Actividad de estudio e investigación

La Actividad de Estudio e Investigación (AEI) es un dispositivo didáctico que propone la TAD con el objetivo de llevar a los espacios educativos la PCM, para superar el paradigma clásico de PVO.

Las AEI se caracterizan por organizar el proceso de estudio a partir de buscar respuestas a una pregunta (dada por el profesor), y de las preguntas derivadas de ella, que puedan surgir, que provea las razones de ser del estudio y recuperen el sentido de los contenidos a estudiar.

Durante la actividad, los estudiantes con la ayuda del profesor y de diversos materiales o fuentes de información accesibles por ellos (libros, revistas, páginas web, tecnología, entre otras) estudian diversos contenidos matemáticos u otros, como parte del proceso de construcción para dar una respuesta válida a la pregunta.

3 Metodología de investigación

Se realiza una descripción del fenómeno educativo o del proceso de estudio con recurso a la técnica de observación participante (el investigador es el mismo profesor que implementa la AEI) [9]. El análisis de los datos obtenidos de lo realizado por los estudiantes durante la implementación de la AEI es no estandarizado. Los datos se interpretan en función del contexto de un modo cualitativo.

3.1 Contexto educativo

El escenario donde se implementa la AEI es un curso de matemática en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (Argentina) en la que se dictan las carreras de: Química, Industrial, Aeroespacial, Mecánica, Electrónica, Computación, Civil, Hidráulica, Agrimensura, Energía eléctrica, Electromecánica, Materiales y telecomunicaciones.

La asignatura en la que se realiza la investigación es Matemática C (MC), de carácter obligatoria para todas las carreras del Ciclo Básico, correspondiente al 1° semestre de 2° año, aunque se vuelve a dictar en el otro semestre del año, para los estudiantes que no hayan alcanzado a aprobarla y/o cursarla. Aspectos metodológicos y didácticos de MC se pueden

encontrar detallados en [10]. Cada semestre se organiza cerca de 7 cursos, con aproximadamente 60 a 80 estudiantes en cada uno, con una carga horaria de 9 horas, distribuidas en 3 clases semanales de 3 horas cada una.

Los contenidos mínimos de MC, distribuidos en dos módulos, son: Series de potencias, Polinomio de Taylor y Serie de Taylor, Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices, operaciones con matrices, matriz inversa, determinante, rango, Espacios Vectoriales, bases, dimensión, Números Complejos, Transformaciones Lineales, Proyección ortogonal sobre un espacio vectorial, Valores y vectores propios de una transformación lineal, Diagonalización de matrices, Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden y sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, Aspectos básicos de serie de Fourier y resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

La AEI se ha implementado en uno de los cursos, desde el año 2019, tanto en presencialidad, como en virtualidad (años 2020 y 2021 - debido al aislamiento dispuesto por el gobierno en la República Argentina por la situación sanitaria causada por la propagación de la COVID-19).

3.2 Gestión de la AEI, recolección de datos y análisis de resultados

La gestión de la AEI la lleva adelante el profesor/investigador, quien administra los tiempos académicos, propone la pregunta inicial y las derivadas, y las tareas a realizar.

La AEI se ubica en el segundo módulo luego del estudio de los temas de Transformaciones Lineales y se propone que ocupe hasta 3 clases, además de tareas a realizar fuera de las mismas. Los estudiantes trabajarán en grupos de no más de tres integrantes cada uno, que organizan ellos mismos, sin la intervención del profesor, con cierta autonomía.

La pregunta con la que se inicia la AEI, es la siguiente: *Seleccionar dos marcas de cerveza que se encuentren a la venta en Argentina e intentar responder a la pregunta: ¿Cuál recomendarías y por qué?*

Para obtener respuesta, el profesor plantea a los estudiantes la realización de un experimento y de una serie de tareas, algunas de las cuales requieren del uso de tecnología, del *software* de geometría dinámica GeoGebra [11] y de búsquedas en la Web y en libros. Algunas tareas son realizadas en el aula (presencial o aula virtual según fuera la modalidad del curso) con todos los estudiantes trabajando y debatiendo junto al profesor. Otras, son posibles de realizar fuera de la clase.

Al finalizar la AEI cada grupo presenta un informe final con lo estudiado, además de responder un Formulario, en Google Forms. El Formulario consulta sobre varios aspectos. Uno de ellos se refiere a si han tenido, y en qué medida, dificultades durante la realización de la AEI. Para ello se categorizan etapas según se muestra en la Tabla 1. El Informe Final y las respuestas obtenidas de esta parte del formulario, se utilizan luego para comprender el fenómeno educativo y describir la AEI.

Otras preguntas del formulario indagan sobre sus responsabilidades en el trabajo en grupo al realizar la AEI. En este caso, la pregunta es ¿Tuvo dificultades al trabajar en grupo? Esta a su vez se subdivide en otras según se muestra en Tabla 2. Para las respuestas pueden marcar, entre: “muchas”, “pocas”, o “no tuvo dificultades”. Las respuestas a esta pregunta

tienen por objetivo conocer el desarrollo de habilidades que han alcanzado los estudiantes en relación a trabajar en equipo.

Finalmente, y de carácter optativo, en el formulario podían agregar un comentario sobre su opinión general respecto a la realización de la AEI.

Tabla 1
AEI. Etapas de la AEI

Entender el problema real
Realizar la prueba de laboratorio para toma de datos
Registrar y tomar los datos del experimento
Escribir las ecuaciones que modelan los datos encontrados en relación al problema
Usar GeoGebra
Entender el Método de Mínimos Cuadrados
Resolver el problema matemático para hallar la solución a las ecuaciones planteadas
Interpretar los resultados obtenidos en términos del problema

Fuente: El autor.

Tabla 2
Trabajo en grupo

¿Tuvo dificultades al trabajar en grupo?
Identificar las metas y responsabilidades individuales y colectivas y actuar de acuerdo a ellas
Asumir responsabilidades y roles dentro del equipo de trabajo
Conectarme con mis compañeros de Grupo

Fuente: El autor.

4 Descripción de la AEI

En esta sección se describe la AEI implementada en los cursos de MC, durante varios semestres. Para la presentación, en este trabajo, de los resultados obtenidos se han seleccionado los registros más representativos, y de distintos grupos de estudiantes, de la totalidad de material que se ha recolectado durante todas las implementaciones.

La AEI la presenta el profesor a los estudiantes en una clase mediante el siguiente desafío. *Seleccionar dos marcas de cerveza que se encuentren a la venta en Argentina e intentar responder a la pregunta. ¿Cuál recomendaría y por qué?* Para la búsqueda de respuestas a la pregunta, el profesor propone a los estudiantes realizar una serie de actividades, vinculadas a la investigación, a la exploración y a la experimentación, que se describen a continuación.

4.1 Actividad 1. Previa a la experimentación

Primero se propone a los estudiantes investigar acerca de ciertas cuestiones referidas a la espuma de la cerveza y al proceso de desintegración, que podría dar una primera respuesta a la pregunta sobre la calidad de una cerveza, previo a la realización de un laboratorio experimental.

Esta actividad la realizan en grupos en horario fuera de la clase investigando en la web.

A continuación, se transcriben las preguntas propuestas por el profesor (P) y algunas de las respuestas dadas por uno de los grupos de estudiantes (R).

P: ¿Qué entiende por desintegración?

R: *La desintegración es un proceso en el que una partícula, elemental o compuesta, se transforman en otras. Es una separación de los distintos elementos que conforman un todo.*

P: ¿Cuáles tipos de desintegración conoce?

R: *Existen distintos tipos de desintegración, como la radioactiva y dentro de esta, la alfa, beta, gamma, neutrones. Desintegración nuclear, que es la transformación de un núcleo atómico por pérdida de una partícula, teniendo liberación de energía. La desintegración de una cierta materia varía en función del tiempo.*

P: ¿Conoce de qué forma varía?

R: *La desintegración va decreciendo con el tiempo, a medida que los núcleos radiactivos se desintegran. Esta sigue una ley exponencial decreciente. Si N_0 es el número de núcleos radiactivos en un instante inicial, después de cierto tiempo t , el número de núcleos radiactivos presentes $N(t)$ se ha reducido a $N(t) = N_0 e^{-at}$, donde a es una denominada constante de desintegración.*

P: ¿Podrían dar un ejemplo del uso de conocer la desintegración de cierta materia?

R: *Un ejemplo del uso de conocer la desintegración de una cierta materia es, el decaimiento radioactivo del Carbono-14. En este caso se utiliza el carbono-14 para la datación arqueológica, transcurrido un tiempo desde la muerte del organismo, los restos así tendrán una menor cantidad del carbono-14 inicial. Basándose en este fenómeno, Libby en 1949, ganando posteriormente en 1960, el Premio Nobel de Química.*

P: ¿Podrá servir conocer el proceso de desintegración para analizar la calidad de una cerveza?

R: *Conocer el proceso de desintegración de la espuma de la cerveza, nos sirve para analizar la calidad de una cerveza, debido a que tener una buena espuma consistente y duradera, nos indica que es una buena cerveza, ya que de esta forma la espuma evita que se pierdan las burbujas de gas, de la carbonización producida por la fermentación de cereales y levaduras que esta contiene, y la oxidación del líquido, perdiendo también aroma y sabor.*

P: ¿Sabe cómo se llama la espuma de la cerveza?

R: *A la espuma se le denomina "cabeza", "corona" o "giste" (esta última proviene del alemán y que significa espuma). Como anteriormente mencionado la espuma de la cerveza es considerada un parámetro de calidad. La espuma tiene propiedades muy características como la cremosidad, densidad, fijación al cristal (vaso, copa, otros) y su estabilidad. Todas ellas dependen del cereal y malta utilizados en el proceso de elaboración. Por ejemplo, una cerveza elaborada con trigo, genera una espuma más densa y duradera que las que se elaboran de cebada. En la mayoría de las cervezas, el gas que produce el burbujeo y le da a la cerveza espuma es el dióxido de carbono (CO_2), este se crea por levaduras durante la fermentación. También hay cervezas en la cual se agregan grandes porcentajes de nitrógeno (N_2) así obtener una mejor espuma, al ser el N_2 menos soluble en el agua que el CO_2 , también esta proporciona unas burbujas más pequeñas y de mejor estabilidad. La espuma tiene dos razones principales: a) Por un motivo estético se relaciona la cantidad de espuma con la calidad de la cerveza. Para algunas personas, mayor espuma*

significa mejor calidad. En cambio, los catadores consideran un parámetro de calidad la adherencia al cristal del recipiente.
 b) La espuma de la cerveza crea una barrera que impide el contacto directo del líquido con el aire, evitando que se oxide y cambie el sabor. Además, retiene los aromas de la bebida.

4.2 Actividad 2. Experimentación con espuma de cerveza y registro de datos reales

La segunda actividad propuesta para la AEI es experimental y consiste en que cada grupo de estudiantes seleccione dos marcas de cervezas de venta en Argentina, a su gusto, y que utilizando los materiales listados realicen un experimento.

- Un vaso de sección uniforme
- Cerveza (fría)
- Cronómetro
- Un celular con una aplicación capaz de medir longitudes en la pantalla, o cinta reglada
- Un celular que fotografíe o grabe en video el experimento
- Aplicación *Physics Toolbox Sensor Suite* (optativo) [12].

Con estos materiales los grupos de estudiantes deben realizar el experimento que consiste en volcar la cerveza en un vaso uniforme y registrar datos en tiempo real, correspondientes a la altura de la espuma de la cerveza y el tiempo transcurrido desde el inicio (que el vaso sea de diámetro uniforme, asegura que el volumen es proporcional a la altura). Se les indica que sigan el siguiente método.

- Registrar la marca (y características) de la cerveza y el diámetro del recipiente.
- Sobre una mesa colocar el vaso, la regla y el reloj. Verter la cerveza con una buena espuma.
- Fotografiar o grabar en video (en el instante cero, luego puede ser cada 15 segundos, los primeros 2 o 3 minutos, cada 30 segundos el tiempo restante).

Se les menciona también que puede ser útil un trípode para mantener el *smartphone* fijo. Luego de obtener todas las imágenes registran las diferentes alturas de la espuma. Se puede mejorar el proceso de decaimiento colocando sobre la espuma una pequeña lámina, de por ejemplo acetato, para uniformizar el descenso de la espuma.

Los grupos seleccionaron cervezas de venta en Argentina, de tipo artesanal, rubia y/o negra. A modo de ejemplo, en la Fig. 2, se muestra como dispusieron los materiales para realizar el experimento, y en la Tabla 2 los datos obtenidos por un grupo (a modo de ejemplo), para las dos cervezas elegidas.

Esta Actividad es realizada por los estudiantes en sus hogares, los datos obtenidos les servirán de sustento para estudiar e investigar en la Actividad siguiente.



Figura 2. Experimento para registrar datos de tiempo y altura de la espuma de la cerveza.
 Fuente: El autor.

Tabla 2
 Datos obtenidos del experimento por un grupo.

Tiempo (segundos)	Brahma Altura espuma (centímetros)	Schneider Altura espuma (centímetros)
0	6,5	6,5
15	6	
30	4,2	5
45	4	4,7
60	3,8	4,5
75	3,5	4
90	3,1	3,8
105	2,8	3,1
120	2,3	2,8
150	1,5	2,2
180		
210		

Fuente: El autor.

4.3 Actividad 3: Modelo matemático y resolución

Esta Actividad es realizada en la clase junto al profesor. Luego de la obtención de los datos (Actividad 2), cada grupo, realiza su análisis. Para ello utilizan GeoGebra (*software* de geometría dinámica de uso libre y gratuito, multiplataforma, con diversas Vistas) disponible en *notebooks* personales que llevaron al aula de clase.

En la Vista Hoja de Cálculo insertan los pares de datos obtenidos (tiempo [seg]), altura [cm]) por cada grupo y crean con éstos una lista de puntos con la herramienta ListaPuntos. Acuerdan las variables *t* (tiempo) en el eje de las abscisas y *h* (altura) en centímetros en el eje de las ordenadas. Es decir que obtienen una tabla de datos (*t_i, h_i*) para *i*=1,...,n donde *n* depende de la cantidad de registros que cada grupo haya realizado.

Luego el profesor pregunta: *¿Cuál es el modelo funcional que mejor ajusta los pares de datos?* Según lo encontrado en la Actividad 1 y por lo observado en la Actividad 2, proponen el modelo del estilo exponencial:

$$N(t) = k \cdot e^{-m \cdot t} \quad (1)$$

El objetivo es entonces estimar los parámetros k y m , para cada conjunto de datos, y lograr responder al desafío.

Para esto se propone para cada par (t_i, h_i) y según (1), la relación:

$$N(t_i) = h_i = k \cdot e^{-m \cdot t_i} \quad (2)$$

con $i=1, 2, 3, \dots, n$, con n número de datos. Obtienen un sistema de n ecuaciones no lineales, de la forma por ejemplo cómo se muestra a continuación. En este caso un grupo obtuvo un sistema con 12 ecuaciones no lineales.

$$\begin{aligned} 5,4 &= k \cdot e^{-m \cdot 0} \\ 4,7 &= k \cdot e^{-m \cdot 15} \\ 3,6 &= k \cdot e^{-m \cdot 30} \\ 2,8 &= k \cdot e^{-m \cdot 45} \\ 2,2 &= k \cdot e^{-m \cdot 60} \\ 1,7 &= k \cdot e^{-m \cdot 75} \\ 1,3 &= k \cdot e^{-m \cdot 90} \\ 0,9 &= k \cdot e^{-m \cdot 105} \\ 0,6 &= k \cdot e^{-m \cdot 120} \\ 0,5 &= k \cdot e^{-m \cdot 150} \\ 0,3 &= k \cdot e^{-m \cdot 180} \\ 0,2 &= k \cdot e^{-m \cdot 210} \end{aligned} \quad (3)$$

Para poder resolver el sistema (3) con herramientas de Álgebra Lineal, se decide linealizar cada ecuación aplicando logaritmo a ambos miembros, obteniendo para cada valor $i=1, \dots, n$, lo siguiente:

$$\ln(k) - m \cdot t_i = h_i \quad (4)$$

En forma matricial, y denominando $K = \ln(k)$, se escribe el sistema de ecuaciones, en general, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -t_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

Denominan a tal sistema (5) de la forma $A \cdot X = B$, con A matriz de orden $n \times 2$, X de 2×1 y B de $n \times 1$.

La creación de las matrices y los cálculos para ello, los estudiantes lo realizan en GeoGebra en la Hoja de Cálculo usando la herramienta CrearMatriz (Fig. 3).

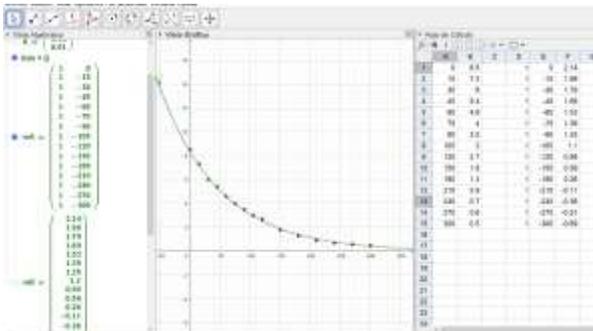


Figura 3. Creación de matrices en GeoGebra. Fuente: El autor.

Dado que el objetivo es estimar los parámetros y para ello es necesario resolver el sistema de ecuaciones, los estudiantes investigan que tipo de sistema lineal obtuvieron: compatible o incompatible. Para ello y aprovechando las herramientas de GeoGebra utilizan el comando de EscalonadaReducida y se lo aplican a la matriz del sistema de ecuaciones (A) y a la matriz ampliada, que adiciona a la matriz del sistema la columna de los términos independientes ($A \parallel B$). Observan que ambas matrices tienen distinto rango. Esto implica, de los saberes estudiados de matrices y de espacios vectoriales, que el sistema es incompatible, y que el vector de los términos independientes no es combinación lineal de las columnas de la matriz del sistema. Es decir, B no pertenece al Espacio Columna de la matriz A .

Esto lleva al estudio, con sentido, del Método de Mínimos Cuadrados que consiste en hallar la “mejor solución X ” al sistema de ecuaciones lineales incompatible $A \cdot X = B$. En esta etapa los estudiantes se guían con un material teórico práctico editado por la Cátedra de MC [13] y de libros [14-15-16].

En general, si A es de orden $m \times n$ y B $n \times 1$, se busca X_0 de R^n tal que sea mínima la norma $\|A \cdot X_0 - B\|$. Para cualquier $X \in R^n$, $A \cdot X$ es combinación lineal de las columnas de A , por lo que buscar el mínimo binación de las columnas de A que más se acerca a b . Eso no es más que la proyección ortogonal de B sobre el espacio columna de A . El vector que minimiza la norma es aquel tal que $A \cdot X_0$ sea la proyección ortogonal sobre el espacio de las columnas de A , es decir, $b - A \cdot X_0$ ortogonal a $A \cdot y, \forall y \in R^n$.

Por lo tanto, el producto escalar

$$\langle A \cdot y, b - A \cdot X_0 \rangle = 0 \quad \forall y \in R^n \quad (6)$$

$$y^t \cdot A^t (b - A \cdot X_0) = 0 \quad \forall y \in R^n \quad (7)$$

Entonces:

$$y^t \cdot (A^t b - A^t A \cdot X_0) = 0 \quad \forall y \in R^n \quad (8)$$

de lo que se deduce que

$$(A^t A) \cdot X_0 = A^t b \quad (9)$$

Al sistema de ecuaciones (9) se lo denomina sistema de ecuaciones normales. En el caso en que la matriz A tenga sus columnas linealmente independientes, la matriz $A^t A$ es no singular, y entonces la solución de las ecuaciones normales es única e igual a:

$$X_0 = (A^t A)^{-1} \cdot A^t \cdot B \quad (10)$$

Cada grupo de estudiantes, trabaja sobre sus conjuntos de pares de datos, y utilizando las herramientas de GeoGebra, los comandos para matrices, cálculo de inversa, transpuesta y producto entre matrices, obtienen el vector solución del sistema de ecuaciones normales. Hallan, m y K , y los reemplazan en el modelo funcional: $N(t) = K \cdot e^{-m \cdot t}$, graficando junto a los pares de datos registrados. Verifican, además que la función hallada, coincide con la que arroja el comando de GeoGebra AjusteExponencial (Figura 4).

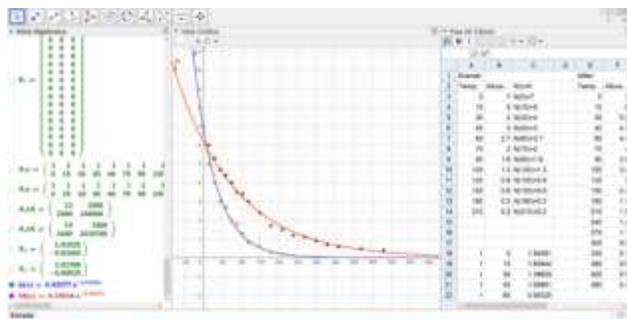


Figura 4. Modelo funcional obtenido con GeoGebra.

Fuente: El autor.

4.4 Actividad 4: interpretación de los resultados y conclusiones

La cuarta y última actividad consiste en dar respuesta a las preguntas iniciales, reflexionar sobre el experimento realizado y corroborar la ley física de decaimiento exponencial, tal como habían mencionado en las respuestas en la Actividad 1. Además, comparar la constante K obtenida con los datos obtenidos por otros grupos, haciendo un cuadro comparativo, y responder sobre las calidades de las cervezas según el decaimiento de su espuma.

Una de las respuestas al desafío que dio uno de los grupos de estudiantes que habían seleccionado la cerveza Imperial y Schneider, obteniendo modelos de decaimiento, $8,33.e^{-0.01t}$, $7,89.e^{-0.01t}$, respectivamente, fue:

“Para evaluar la calidad de cada cerveza tendríamos que fijarnos en su tasa de decaimiento que, sorprendentemente, para las dos marcas, nos dio igual. A pesar de ello, en general, recomendaríamos la cerveza cuya tasa de decaimiento sea menor, pues esto indicaría que la espuma se conservará por más tiempo, aunque esto puede ser muy subjetivo para cada persona.”

Otra de las respuestas, para modelos obtenidos $10,5.e^{-0.004t}$ (cerveza Andes) y $10,3.e^{-0.01t}$ (cerveza Stella Artois), fue:

“Con base a al experimento realizado en un primer momento se observó que la espuma de la cerveza Andes (roja) tardó más en degradarse que la de la Stella Artois (rubia). Lo que nos llevó a pensar que, mediante la investigación realizada en el pre-laboratorio, se concluye que la segunda cerveza es mejor; ya que al tardar en degradarse más la espuma se conserva los sabores, aromas y otras propiedades de la cerveza por un tiempo más prolongado. Luego esto fue comprobado con los datos obtenidos mediante los cálculos realizados por el método de mínimos cuadrados, lo que nos llevó a comprobar nuestra hipótesis inicial. Esto se debe a que la constante de decrecimiento de la cerveza Andes es menor con respecto al de la cerveza Stella Artois, lo que produce que la espuma de la primera tarde más en degradarse cumpliendo con lo que investigamos en el pre-laboratorio. A modo de conclusión, tomando como parámetro la degradación de la espuma, la cerveza Andes es de mejor calidad que la Stella Artois.”

En la Tabla 3, se resumen los datos obtenidos de los parámetros por cada grupo (de un de los cursos) para las dos cervezas que cada uno seleccionó.

Tabla 3
Parámetros obtenidos para las cervezas seleccionadas.

Grupo	Cerveza	N(t)=k e ^{-mt}	
		m	k
1	Andes	0,0196	5,72
	Quilmes	0,0897	20,74
2	“Patagonia 24.7”	0,0030	19,82
	“Quilmes Imperial IPA” (India Pale Ale 6 o 42 IBU)	0,0027	17,46
3	Brahma	0,0094	6,59
	Schneider (negra)	0,0081	6,87
4	Quilmes (clásica)	0,0110	2,68
	Patagonia Weisser	0,0090	5,37
5	Imperial	0,0060	11,68
	Kuma (artesanal)	0,0065	4,62
6	Stella Artois (rubia)	0,0100	10,35
	Andes (Roja)	0,0040	10,50
7	Patagonia	0,0085	9,58
	Weidmann	0,0075	7,51
8	Imperial Lager (rubia)	0,0130	10,78
	Brahma	0,0070	11,46
9	Brahma	0,0160	6,92
	Miller	0,0062	6,19
10	Quilmes	0,0100	9,20
	Stella Artois (rubia)	0,0070	10,13
11	Brahma	0,0100	6,48
	Heineken	0,0100	7,71

Fuente: La autora.

5 Análisis y discusión de resultados

Al finalizar la AEI los estudiantes hacen entrega de un Informe Final, uno por grupo, de todo el trabajo realizado, además de contestar un Formulario.

En la Tabla 4, se presentan los resultados obtenidos, en porcentaje, para cada pregunta, en relación al nivel de dificultad manifestada por cada estudiante en realizar las tareas de la AEI, según la categorización establecida.

Se observa que, para las tareas relacionadas con entender el problema real, realizar el experimento y el registro de datos, más del 50% no tuvo dificultades, del mismo modo que en la etapa final como es “Resolver el sistema de ecuaciones normales e interpretar los resultados obtenidos”. Las mayores dificultades se manifiestan, en las actividades y tareas que se vinculan con el uso de GeoGebra y con la actividad matemática concreta, que tiene que ver con “escribir las ecuaciones que modelan los datos encontrados y el estudio del Método de Mínimos Cuadrados”.

Tabla 4
Dificultades en realizar cada actividad/tarea de la AEI

Desarrollo de la AEI	Resultados. Nivel de dificultad (%)		
	Sin	Poca	Mucha
Entender el problema real	63	31	6
Realizar la prueba de laboratorio para toma de datos	83	15	2
Registrar y tomar los datos del experimento	65	33	2
Escribir las ecuaciones que modelan los datos encontrados en relación al problema	38	50	12
Usar GeoGebra	42	42	16
Entender el Método de Mínimos Cuadrados	27	65	8
Resolver el problema matemático para hallar la solución a las ecuaciones planteadas	54	36	10
Interpretar los resultados obtenidos en términos del problema	58	40	2

Fuente: El autor.

En relación a la pregunta sobre su desempeño en el grupo de estudio, los resultados encontrados se muestran en la Fig. 5.

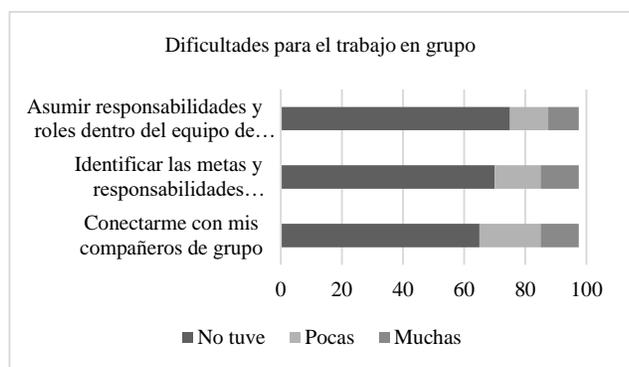


Figura 5: Dificultades para desempeñarse en grupos de estudio.
Fuente: El autor.

Se observa que, para las tres preguntas, más del 60% manifiesta no tener dificultades para desempeñarse en equipos de trabajo.

Finalmente, a la pregunta optativa, algunos de los comentarios se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5
Comentarios sobre la realización de la AEI.

“En este trabajo personalmente creo que aporta enseñanza de una forma más dinámica, existe una estimulación extra mezclando el área de Algebra Lineal y área experimental, teniendo así una experiencia distinta de aprendizaje.”
“Esta metodología de estudio y aprendizaje es mucho más eficaz por el hecho de ser más práctico que teórico. De esta forma también se pudo aplicar en un problema de la vida real un Sistema de Ecuaciones Lineales y no solo en un caso hipotético.”
“Durante las vacaciones de verano e invierno, me dedico hacer cerveza casera junto a un amigo, así que aprender algo más sobre esta bebida de la cual me gusta, disfruto elaborándola y compartiendo junto a amigos.”
“El trabajo no lo considero difícil. Pero trabajar en grupo es un desafío.”

“Personalmente me sirvió para aprender y poner en práctica el uso de GeoGebra.”

“Como grupo, nos costó un poco el uso de GeoGebra hasta que le tomamos la mano. No teníamos mucha experiencia en el uso, más que gráficos sencillos. ¡Luego, nos salió todo bien! En lo personal, me gustó mucho el trabajo y conocer la relación que existe entre los modelos matemáticos en la vida real y en algo tan común como lo es la cerveza. ¡Muy bueno!”

Fuente: El autor.

De los comentarios se observa una buena predisposición de los estudiantes a estudiar de un modo distinto a pesar de dificultades que comentan en la realización.

Conclusiones

En este trabajo se presentó una Actividad de Estudio e Investigación que se enmarca en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, con el objetivo de enfrentar el monumentalismo de los saberes y dar paso al Paradigma del Cuestionamiento del Mundo. La AEI se realizó en cursos universitarios de matemática para ingeniería con el objetivo de estudiar, con sentido y en forma funcional, contenidos de Algebra Lineal, en particular el Método de Mínimos Cuadrados, a partir de buscar respuesta a un desafío que se supone de interés para los jóvenes, vinculado con la calidad de una cerveza.

La gestión de la AEI, llevada adelante por el profesor, fue simple y propuso además que los estudiantes trabajen en grupos con cierta autonomía, importante ello para el desarrollo de habilidades blandas para futuros ingenieros.

La implementación de la AEI incluyó instancias de trabajo en clase y fuera de ella y la realización de un experimento sencillo (medir la altura de una cerveza como varía en el tiempo) por parte de los estudiantes, de bajo costo, motivador para ellos. Para la resolución del desafío, se estudió el Método de Mínimos Cuadrados para obtener resultados mediante el uso del *software* GeoGebra, de acceso libre y gratuito, y disponible en múltiples plataformas.

En relación a los resultados obtenidos del Formulario, se encuentra que los estudiantes no tuvieron dificultades en: entender el problema propuesto, realizar y registrar los datos obtenidos del experimento, e interpretar los resultados en términos del problema. Las mayores dificultades se relacionaron con:

- Escribir las ecuaciones que modelan los datos encontrados en relación al problema (posiblemente por la ausencia de tareas de modelización en instancias anteriores),
- Usar GeoGebra (varios estudiantes conocían el *software*, pero en este caso debieron utilizar varios comandos y Vistas por ellos desconocidos)
- Entender el Método de Mínimos Cuadrados (tema nuevo para ellos que incluye varios conceptos matemáticos).

Con respecto al trabajo en equipo, fueron satisfactorias las respuestas, evidenciándose las capacidades logradas por los estudiantes en este sentido. A pesar de algunas de las dificultades que tuvieron los estudiantes, todos los grupos lograron responder al desafío. Además, al finalizar las Actividades, los grupos, verificaron que los parámetros encontrados (m y K) para los modelos funcionales propuestos

mediante el Método de Mínimos Cuadrados, son los mismos que arroja GeoGebra por el comando AjusteExponencial, otorgándole esto un significado, a tal “caja negra”, en el sentido que da respuesta a una entrada, sin conocer su funcionamiento interno. También, los estudiantes pudieron resignificar el modelo funcional de decaimiento exponencial, que estudiaron en materias anteriores, pero desde un modo funcional en cursos de Cálculo.

En conclusión, la AEI permitió dar paso al PCM permitiendo a los estudiantes organizar el estudio de algunos contenidos de Álgebra Lineal, a partir de buscar respuesta a un desafío, propiciando la formación de ingenieros cuestionadores, críticos, que se animan a hacer preguntas y a buscar respuestas.

Lo descripto no hubiese ocurrido si el proceso de estudio hubiese sido el tradicional en la institución de contexto, ya que, si bien la asignatura MC dispone de clases del tipo teórico-prácticas con bibliografía y material educativo, que sigue las recomendaciones dadas por *The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra*, el mismo aún no promueve realizar varias de las tareas que incluyó la AEI aquí presentada.

Finalmente mencionar que, si bien la AEI fue realizada en el nivel universitario en carreras de ingeniería, es posible de ser adaptada para otros niveles educativos, o en la formación de profesores, u para otras carreras. También puede ser esta propuesta readaptada para el estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden a partir de modelar la variación de la altura de la espuma de la cerveza en relación a la variación en el tiempo.

Referencias

- [1] V. A. Costa, et al., “Enseñanza del Álgebra Lineal para alumnos de Ingeniería Aeronáutica: experiencia motivadora”, en Congreso Mundial y Exposición, Ingeniería 2010. Buenos Aires, 2010.
- [2] V. A. Costa, y C. E. Justo, “El álgebra lineal en la resolución de problemas altimétricos de topografía”, en Encuentro Educación Matemática en Carreras de Ingeniería, Argentina, 2015.
- [3] F. Álvarez-Macea y V. A. Costa. "Enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico." *Eco Matemático*, volumen 10, nro. 2, pp. 65-78, 2019. <https://doi.org/10.22463/17948231.2594>
- [4] A. Leike. "Demonstration of the exponential decay law using beer froth." *European Journal of Physics* 23.1, 2001.
- [5] S. Gil, y J. Di Laccio. "Smartphone una herramienta de laboratorio y aprendizaje: laboratorios de bajo costo para el aprendizaje de las ciencias." *Latin-American Journal of Physics Education* 11.1, 2017.
- [6] Y. Chevallard. "Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente." *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 2, nro. 2, pp. 161-182, 2013. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>
- [7] M. R. Otero, y V. C. Llanos. "La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física." *Revista Electrónica de Investigación en educación en Ciencias*, vol. 8, nro. 1, pp. 77-89, 2013.
- [8] L. Giordano y A. Páez Pino. Reflexiones sobre las nuevas demandas para la ingeniería latinoamericana. GEDCLatam-IFEES-CONFEDI-ACOFI-LACCEI. Bogotá, Colombia. LACCEI Ediciones, 2021.
- [9] R. Hernández Sampieri, C. F. Collado y P. Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*. Vol. 4. México: McGraw-Hill Interamericana, 2018.
- [10] V. A. Costa, y R. Rossignoli. "Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos." *Revista Educación en Ingeniería*, vol. 12, 2017. <https://doi.org/10.26507/rei.v12n23.734>
- [11] Software GeoGebra (2022). <https://www.geogebra.org/>.
- [12] Physics Toolbox Sensor Suite. https://play.google.com/store/apps/details?id=com.chrystianvieyra.physicstoolboxsuite&hl=es_419
- [13] Guía de Estudio. (2015). [Online]. Disponible: <http://www.ing.unlp.edu.ar/catedras/F0304/>
- [14] S. I. Grossman. *Álgebra Lineal*. México: McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- [15] D. Poole. *Álgebra lineal: Una introducción moderna*. México D.F.: Cengage Learning, 2011.
- [16] D. C. Lay. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. México: Pearson Educación, 2007.

V. A. Costa recibió el título de Licenciada en Matemática en 1989 por la Universidad Nacional de La Plata, el título de Magister en Simulación Numérica y Control en 2002 por la Universidad Nacional de Buenos Aires y el título de Doctor en Enseñanza de las Ciencias en 2013 por la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Desde el año 1986 se ha desempeñado como docente en diversos cursos de Matemática en Facultades de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Sus intereses investigativos incluyen: control de sistemas dinámicos y educación en ciencias. Actualmente es Profesor con Dedicación Exclusiva en la Facultad de Ingeniería de la UNLP en la cátedra de Matemática C y Coordinador de la Unidad de Investigación, Desarrollo, Extensión y Transferencia: "Investigación en Metodologías Alternativas para la enseñanza de las Ciencias" (IMApEC).
ORCID: [0000-0003-1782-5378](https://orcid.org/0000-0003-1782-5378)