Revista Educación en Ingeniería
ISSN 1900-8260
Junio de 2008 • N°. 5 • Pp 80-90 • Publicado en línea por la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería -ACOFI- www.acofi.edu.co
Enviado: 24/04/2008 • Aprobado: 23/05/2008

LAS CONCEPCIONES QUE POSEEN LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DEL NÚMERO RACIONAL. Un acercamiento desde los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de Sistemas. Universidad Cooperativa de Colombia, Sede Ibagué

Saúl Osbaldo Aponte López y Ligia Inés García Castro
Universidad Cooperativa de Ibagué, Ibagué (Colombia)

Resumen

El siguiente ejercicio exploratorio pretendió reconocer las concepciones que poseen los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de sistemas acerca del número racional, a partir de sus representaciones semióticas según Duval (1999) o desde los subconstructos según Ohlsson (1988).

De acuerdo con los datos, se evidencia el desconocimiento que poseen los estudiantes aún en el nivel universitario de este objeto matemático. Se reconoce también que las dificultades en parte obedecen a la manera como tradicionalmente se ha venido enseñando este concepto a lo largo de toda su trayectoria académica.

Se aspira con este artículo aportar a la reflexión en el campo de la didáctica a todos los profesores de los programas de Ingeniería de sistemas, en el sentido de reconocer los pocos aprendizajes en profundidad logrados por los estudiantes y que son de particular importancia en la formación como ingenieros.

Palabras claves: número racional, ingeniería de sistemas, matemáticas, aprendizaje.

Abstract

The following exploratory exercise tried to recognize the students conceptions in the first students of Systems engineering about rational number, from their semiotics representations according to Duval (1999) or from the subconstructos according to Ohlsson (1988).

We hope this paper contributes to reflection in the didactics field didactics to teachers of programs of Systems Engineering, in order to recognize few depth learnings achieved by students and these are importance in engineers performance.

Key words: Rational number, systems engineering, mathematics, learning.

Desarrollo de la temática

Desde la Didáctica de las matemáticas[1], como marco contextual de este trabajo, se reconoce la naturaleza y el significado de los objetos matemáticos, entendiendo éstos como *"un sistema emergente de prácticas en donde se manipulan objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos"* Chevallard

[1] Concebida como "*disciplina científica y campo de investigación cuyo fin es identificar, caracterizar y comprender los fenómenos y procesos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas"* Godino (1996).

(1991. p.8) citado por Godino y Batanero(1994); o en términos de Blumer (1969) sugerido por Godino(2002) *"es todo lo que es indicado, señalado, nombrado, cuando se comunica o se aprende matemáticas"*.

De acuerdo con D'Amore (2006), se consideran objetos matemáticos: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentos que se organizan en entidades más complejas como son los sistemas conceptuales. Para el caso del número racional, se pretende reconocer en situaciones, acciones y argumentos de los estudiantes el concepto que subyace a todas estas prácticas.

Para los autores de este artículo, se asume el concepto de objeto matemático propuesto por Chevallard (1991), que plantea que la construcción de conceptos matemáticos, está dada en la dialéctica entre los objetos ostensivos como lo son las representaciones semióticas y los objetos no ostensivos como lo son los objetos matemáticos[2], pero se asume de acuerdo con Duval (1999 y 2006), que es necesario diferenciar el objeto matemático de sus representaciones semióticas, centrando la necesidad de la diferenciación en su tratamiento y conversión como aspecto esencial de la comprensión matemática.

El concepto de número racional ha sido ampliamente analizado en diversos contextos, de acuerdo con Valdemoros (2004), las nociones y conceptos referidos a las fracciones presentan una gran diversidad en el campo de los problemas matemáticos, los significados de medida, cociente, operador multiplicativo y razón, se les atribuye diferentes aplicaciones. Con respecto a esta afirmación, para este estudio se destaca la diversidad de expresiones que puede evidenciarse en el concepto de número racional y los diferentes significados que les atribuyen a estas, los estudiantes.

En la investigación sobre *algunas dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de número fraccionario*, (Cortes, Pérez, 2003) se afirma que la naturaleza del concepto de fracción se encuentra en una posición intermedia entre los números naturales y el numero racional con quien comparte algunas de sus propiedades numéricas, su ambigüedad esta determinada por la amplia posibilidad de significados que se le pueden atribuir como la relación parte – todo, la razón entre dos cantidades o como operador entre dos cantidades. Se corrobora con este estudio, la naturaleza del concepto de fracción y su relación con los números naturales y los racionales así como la diversidad de formas representacionales que posee.

Ríos García (2007) En la edición No. 20 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, en su estudio sobre *Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción*, sostiene que uno de los conceptos para el cual los estudiantes presenta dificultades de comprensión, es el de fracción y esto se debe a las diferentes interpretaciones que admite este concepto, entre esas acepciones se consideran la de parte – todo, razón, reparto, operador, numero racional y numero decimal; considerando además que es necesario que el estudiante las domine todas porque no todas las situaciones se resuelven desde una sola representación.

Finalmente, Lamon (2008) en el NTCM, reconoce que para comprender el número racional, se deben tener adecuadas experiencias con las múltiples representaciones o personalidades como son la fracción como parte – todo, razón, operador, cociente y medida, considerados como subconstructos[3] del número racional de acuerdo con Kieren (1976, 1980).

---

[2] Chevallard (1999) propone una clasificación de los objetos matemáticos en ostensivos y no ostensivos. Entiendo por ostensivo todo objeto que tiene materialidad y no ostensivo son todos los objetos que se les atribuye cierta existencia sin poder ser vistos.

[3] Constructo matemático como una entidad conceptual que esta compuesta no solo por un conjunto de definiciones, axiomas y teoremas (teoría matemática), sino que también incluye todas aquellas situaciones problema y sistemas simbólicos que estén relacionados con dicha teoría. Cuando esta entidad se hace objeto de aprendizaje, éste se da a través de un proceso en el cual entran en juego las representaciones simbólicas (formales y no formales) y cognitivas de quien aprende, las situaciones problema desde las cuales se dota de sentido la entidad conceptual, las leyes y propiedades matemáticas que dan sentido matemático al constructo y los procedimientos (tanto formales como no formales) bajo los cuales se puedan resolver las situaciones problema que se planteen. (OHLSSON 1980, citado por OBANDO, 2003).

De acuerdo con lo anterior, se propone indagar en los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de Sistemas, las concepciones que poseen en torno al concepto de numero racional, asumiendo desde la postura de Lamon, que en este concepto coexisten varias representaciones como lo es el concepto de fracción, razón, operador, medida, cociente, porcentaje y decimal; asumiendo que los estudiantes que se encuentran iniciando su formación superior han logrado la comprensión de este concepto.

En nuestro contexto educativo, el desarrollo del pensamiento numérico se inicia a partir de la construcción de los números naturales, de acuerdo con Ruiz Higueras (2003), este conocimiento se considera *naturalizado*, utilizado cotidianamente en el contexto humano y social, de allí que es necesario reconocer lo que los estudiantes conocen antes de abordarlos desde un proceso de enseñanza, el conocimiento de los números naturales es ampliamente desarrollado en toda la formación básica del estudiante, partiendo de una acción matemática fundamental que es el conteo.

Se reconoce en este análisis que la enseñanza de la matemática escolar se inicia por la concepción de número, hasta avanzar por los sistemas numéricos (enteros y racionales), reconociendo el pensamiento numérico como la manera de resolver situaciones en las que se hace uso de las estructuras numéricas y por consiguiente de sus representaciones.

Según Kieren (1988) citado por Dickson (1991, 294): “los números racionales” son los números expresables como razón o cociente de dos números enteros y por consiguiente entre ellos se cuentan todas las fracciones, los porcentajes y demás decimales representables mediante fracciones, esto es los decimales finitos y los periódicos.

Para este ejercicio exploratorio realizado con estudiantes de primer semestre de Ingeniería de Sistemas, se parte de la construcción que han hecho de este objeto matemático número racional, basado en los acercamientos que han tenido con él. Era de esperar que el desempeño de los estudiantes en la resolución de las situaciones propuestas de acuerdo con el contacto permanente que han tenido con este concepto en toda su trayectoria académica, asumiendo que los niveles de conceptualizacion que se alcanzan en el aprendizaje del concepto de número, no trascienden los números naturales, pues no se logran establecer comprensiones con otros sistemas numéricos, fundamentalmente los enteros, reales y racionales de acuerdo con Obando (2003).

La diversidad de representaciones es la que permite su conceptualización pues están relacionados con diferentes tipos de situaciones (medida, parte de un todo, reparto, comparativas) y además requieren de diferentes tratamientos de los registros semióticos y de conversiones de un registro a otro. En términos de Duval (1999), es la relación entre la noesis, entendida como el acto de pensar y la semiosis la que determina la comprensión en este caso matemática; de esta manera, cobra sentido el reconocer en los estudiantes el uso de las diferentes representaciones semióticas.

El diseño del instrumento de exploración de las concepciones de los estudiantes, tuvo dos pretensiones fundamentales, en primer lugar analizar la noción parte-todo por considerarse el concepto que recoge los componentes fundamentales del concepto de número racional (Llinares, 1988) y en segundo lugar evidenciar el tratamiento de las siguientes representaciones semióticas: Fracción, cociente indicado, porcentaje, decimal y razón.

Categorías 1: noción parte - todo

La noción parte – todo es la relación de una unidad o un todo con sus partes, teniendo como condición su división en partes iguales. Cuando una totalidad se divide en varias partes iguales, a la relación multiplicativa existente entre la magnitud de cada una de estas partes y la magnitud de la totalidad se suele llamar “fracción” de la magnitud total.

El concepto de fracción respondió en su origen histórico a la necesidad de repartir objetos entre varias personas: el problema de cómo distribuir 1, 2, 6 o 7 hogazas de pan entre 10 personas, es uno de las situaciones que aparecen resueltas en el Papiro de Rhind (también conocido como papiro de Ahmes, escriba que lo copió hacia el 1650 a. C), como una de las referencias históricas más antíguas sobre la aparición de este concepto. (Méndez, 2003).

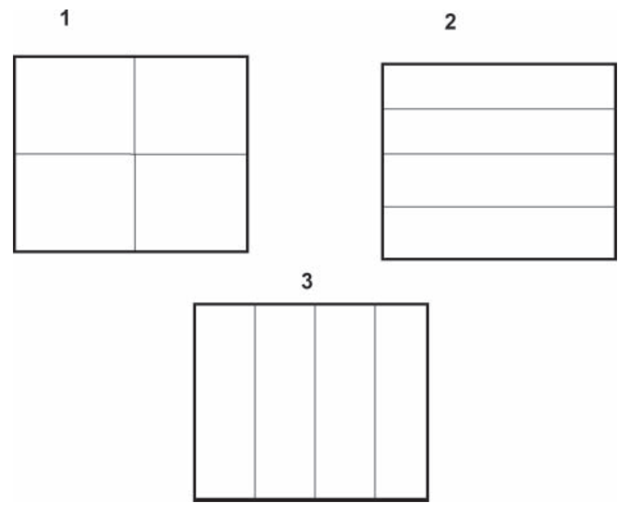
Para los antiguos egipcios, el problema de expresar las partes de un todo fue el motor de la invención de los fraccionarios, junto con la necesidad de medir cantidades continuas ya que los números naturales resultaban insuficientes. La matemática árabe va a dar un auge importante en el manejo de los números racionales, introduciendo una notación más actual. Es Stevin, en el siglo XVI quien establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal, dando un fuerte empuje a su aceptación generalizada. La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, construyéndolo como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros. Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, en forma de fracción, y con notación decimal. La escritura en forma de fracción tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes, como el tiempo, da lugar a la notación decimal (Centeno, 1988).

Para reconocer en los estudiantes la noción parte – todo, se propusieron dos ejercicios, que se presentan a continuación:

> Tomen una hoja tamaño carta, hagan dobleces a esta hoja para "*obtener 4 partes iguales*". Encuentren diferentes formas de doblar la hoja para obtener las partes pedidas y al final de la experimentación deben responder las siguientes preguntas:
> - ¿Cuál será el método más correcto?
> - ¿El tamaño de los pedazos varia según el método que se siga?
> - ¿La cantidad de papel que hay en cada pedazo es distinta?

Al respecto los estudiantes que participan en este ejercicio exploratorio, logran realizar la partición física recurriendo generalmente a un solo método (el caso 1), y eventualmente recurren a otros métodos como los presentados en la siguiente grafica (2 y 3), tal como se evidencia en la grafica 1.

Gráfica 1



De acuerdo con Vasco (1994), la partición física y la selección de la unidad no es lo mismo que la partición matemática, en la partición física no se tiene en cuenta la magnitud que es la que se parte o divide, en tanto al realizar la acción matemática, si se tiene en cuenta la magnitud, como la longitud, el área o la masa.

Como puede observarse en todas las evidencias de los estudiantes, el partir por la mitad un objeto o en cuartos se realiza a través de acciones físicas, no matemáticas y, se hacen tratando de doblar el papel de tal manera que no se pierda la forma (cuadrada o rectangular), pero no se tiene en cuenta la magnitud a la hora de hacer la partición.

Hay una tendencia a dividir por mitades el papel, pero las mitades tradicionales, es decir, se recurre a métodos convencionales como ir doblando las puntas, doblar en forma de cruz, asumiendo que esta partición, mantiene la forma cuadrada del "todo" a fraccionar, el concepto de igualdad se haya directamente relacionado con esta forma, en este caso la cuadrada o la forma rectangular sobre el cual se pretende mantener la figura cuadrada – rectangular, en este caso de la hoja de papel.

Algunos de los argumentos de los estudiantes dan cuenta de una conservación de área al afirmar lo siguiente:

> *Est. 10: "El tamaño de los pedazos no varía según el método utilizado debido a que no dan las mismas formas, lo que varía es su forma, seguirán ocupando el mismo espacio o tamaño de papel y la cantidad de papel es la misma".*

Según el relato del estudiante, se establece una diferencia entre la forma y la magnitud, y reconoce la conservación de la magnitud más no de la forma, lo que da cuenta de una adecuada comprensión, al menos desde la partición física.

En otra de las respuestas de los estudiantes sí predomina la forma antes que la magnitud, veamos:

> *Est. 12: La mejor manera de doblar el papel para que queden en partes iguales es cuando lo doblamos en cruz, porque de las otras formas quedan o más largos o más cortos"*

Se presta atención a la forma, más no a que las formas que queden sean iguales; de acuerdo con esta respuesta, los estudiantes recurren a una división convencional, porque hay un interés por mantener la forma cuadrada o rectangular. Se encuentra que los estudiantes en la acción física de partir en pedazos una magnitud, asumen la igualdad asociada a la forma de los pedazos en los que se divide la magnitud dada, no a que éstas tengan igual medida; el mantener las partes de la hoja de forma cuadrada o rectangular, les da sentido de igualdad.

La siguiente situación también pretendió reconocer la noción parte – todo en los estudiantes:

Tres estudiantes deben hacer unos dibujos para pegar en su cuaderno de Biología, pero no cuentan sino con dos hojas de papel blanco para los tres. ¿De qué manera se pueden repartir las hojas para estar seguros que cada estudiante reciba la misma cantidad de papel?

> *Est. 5: Les toca 1/3 de cada hoja.*
> *Est.6: 1/3 de cada hoja para cada uno de los estudiantes.*
> *Est.15: A cada estudiante le corresponde dos partes.*

Se puede determinar que la imposibilidad de los estudiantes a realizar particiones en 3, esta determinada por la facilidad y el uso frecuente de partir siempre en primera instancia por mitades, de acuerdo con Vasco (1994, 26), el partir por "la mitad" o "en cuartos" son acciones físicas no matemáticas y son dependientes de la cultura, porque son las particiones a las que generalmente nos vemos enfrentados y esto se evidencia en procedimientos como:

> *Est. 13:"Las hojas las parto a la mitad y las reparto y sobra una y la dejamos sola".*
> *Est. 27:"Las dos hojas las debo doblar en pedazos de 4 partes, me quedaran 8 cuadritos los reparto y me sobran dos, esos los parto a la mitad y los doy y me sobra un pedacito".*
> *Est. 28:"Deberán cortar las hojas a la mitad y un pedazo quedara sobrando".*

Hay una acción concreta de partir objetos en "partes iguales", pero esta acción no lleva a la utilización de operadores matemáticos porque no se considera la magnitud como aquello que hay que partir, sino que es un todo, que tiene una forma y es ella la que se hace necesario partir.

Es importante destacar que en esta primera aproximación a las representaciones que poseen los estudiantes en cuanto a reconocer la fracción como partidor en una relación parte – todo, el ejercicio planteado para explorar ideas previas, favoreció el tratamiento de la acción física, por encima de la acción matemática y sólo en los siguientes casos, los estudiantes recurrieron al procedimiento matemático para encontrar la solución:

> *Est. 9: "3 para 2 es igual a 2/3, para doblar una la hoja se divide en 3/3 y se dividen en 2/3 para cada uno".*

En otro caso un estudiante recurre a medir la hoja y plantea la siguiente solución:

> *Est.32:"56/3=18, se divide la medida de la hoja en 3 y el resultado es de 18 cm. y queda sobrando 2 cm. de papel. Una hoja se reparte en 9 centímetros por tres partes en forma vertical. Alumnos 3/2= 1,5 hojas. 6/3 repartidos entre 3".*

Sin embargo seguimos encontrando que a pesar de recurrir a estos procedimientos no se establece una relación coherente entre la acción física y el resultado matemático posible, por lo tanto, se cae en imprecisiones en el tratamiento de la representación semiótica, como en el caso anterior.

Nótese también que al recurrir a estos procedimientos, se pierde la conservación de la igualdad, o el sentido de agotar el todo.

Existen tres momentos en la construcción del concepto de fracción y se pueden evidenciar en lo expresado por los estudiantes:

1. El primer momento se caracteriza por una perdida de la equivalencia de las partes al fraccionar la unidad.

   Est.34:"Las dos hojas las debo doblar en pedazos de 4 partes, me quedaran 8 cuadritos, los reparto y me sobra una ese lo parto a la mitad y lo doy".

2. Las equivalencias se conservan en el fraccionamiento del entero, pero con el uso prioritario de la fracción unitaria.

   Est.38: A cada estudiante le corresponde 1/3 de cada hoja.

3. Se descubre la utilización de estrategias multiplicativas, tanto en la relación entre el número y las partes como entre el conjunto de éstas y las partes proporcionales del reparto.

Para los estudiantes que participaron en esta actividad se reconoce que es la privilegiada por ellos, así no sea la respuesta correcta:

Est.16:"1/3 cada pedazo, 2/3 para cada estudiante, la suma de la totalidad para cada estudiante serian 2/6".
Est..23:"Les toca 2/3 de papel. Sumando los 2/3 de cada uno nos da 56/27".
Est. 25: 2/3 o sea que 0,6".
Est. 29: "Se reparten las hojas en 6 partes iguales, 6/3 mas 6/3 nos da 12/9, lo que equivale a 2/3."
Est.12: "Cada hoja representa 2/3 tercios".
Est.18: "Para repartir las hojas entre 3 estudiantes tengo que dividir en tercios y tocaría 3/3. A cada uno le toco de a 4/6".
Est. 20: "Muy fácil se doblaba la hoja se le daba _ de 4 partes de cada hoja y así los tres estudiantes quedaron con la misma cantidad. De las dos hojas que tenían las dividí en tres partes iguales entonces considere que a cada uno le toca 2/3".
Est. 10: "A cada estudiante le toca de a 2 pedacitos iguales o sea que en fracción representa 2/3 cada alumno".
ESt.17:De las dos hojas que tenían las dividí en tres partes iguales entonces considere que a cada uno le toca 2/3".

Es posible identificar en los relatos anteriores, como se hace conversión de los registros representacionales, pasando de una representación proposicional a una numérica en una misma expresión y además les permite dar respuesta a la situación propuesta, veamos:

Est..29:"Cada hoja se divide de a 3 fracciones quedan 6 fracciones y hay que dividirlas entre 3/6 entonces a cada estudiante le toca de a 2 fracciones. A cada niño le dan dos partes de papel porque 3 x 2 = 6. 1/3 + 1/3 = 2/6. Cada hoja se divide de a 3 fracciones y hay que dividirlas entre 3/6 = 2 entonces a cada estudiante le toca de a 2 fracciones".

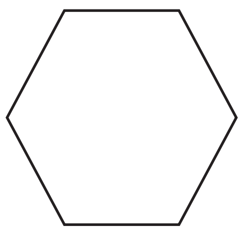
El tratamiento de los registros representacionales da cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes en el manejo de algoritmos, sumado a la funcionalidad que puedan tener las ideas previas que tiene el estudiante, cuando se asume 3/6 como tres repartido entre 6.

Estas dificultades ponen en evidencia la influencia que tiene el intenso trabajo con el conteo de los números naturales que se hace en los primeros años de la educación básica, a la hora de operar con los racionales, lo que en palabras de Llinares (2003), se afirma que el tratamiento de las representaciones puede llegar a generar obstáculos con el contenido representado, es decir, no se establece una relación entre lo sintáctico, que está dado por el uso de los símbolos y lo semántico, su contenido.

En matemáticas al igual que en las ciencias naturales o sociales, la persistencia que tienen las ideas previas se deben en gran parte a la posibilidad que éstas ofrecen en la solución de problemas, en donde de alguna manera "funcionan".

Si la siguiente figura constituye los 2/3 de otra,
¿podría dibujar la otra figura?
¿Qué requiero para poder hacerlo?
Qué fracción del todo representa cada parte?

Este es un problema donde hay que reconstruir el todo, conocida la parte y la fracción.



Es de anotar que ninguno de los estudiantes logro acertar con la respuesta al problema planteado, debido a la imposibilidad de dar cuenta del todo.

Obsérvese en los siguientes relatos extraídos de los estudiantes:

> *Est. 23: "Requiero de otra parte que equivalga a 1/3, ya que asi nos daría 3/3 que seria la parte entera"*
> *Est. 17: "2/3 mas 1/3 me dan 3/3 o sea la unidad."*
> *Est. 22: "1/3 es la fracción que representa todo."*
> *Est.2:"2/3 mas 1/1 me da 5/3."*
> *Est.4: "La fracción que representa cada parte es de 1/3"*
> *Est. 13: "Se puede construir la otra figura sumando la mitad a esta figura"*
> *Est. 20: "Se supone que las partes son todas iguales y aquí hay 2 partes de la figura, la tercera es la mitad de esta"*
> *Est. 37: Sumarle la mitad de la figura para así completar la otra figura que contenga los 3/3."*

El concepto de unidad se pone de manifiesto cuando se propone su reconstrucción a partir de las partes, esta situación puede presentar dificultades de resolución a los estudiantes por lo que no es posible saber cual va a ser su representación, tal como lo plantea un estudiante

> Est. 2: "*Nos falta 1/3, que no sabemos como es"*.

El significado de la unidad es el significado del "todo". Según Llinares (2003), "*la manera en la que pensemos sobre la unidad y la parte nos proporcionara diferentes maneras de representarla gráficamente"*, lo que da cuenta de su dificultad para identificarla.

Categoría 2. Partición a través de la medida

A partir de lo anterior, aparece un primer concepto asociado a la medida, de acuerdo con Chamorro (1991, p. 17) cuando dice que "*para medir, el niño utiliza al principio una medida perceptiva a partir de impresiones sensoriales, antes de adoptar una unidad de medida"*, de acuerdo con lo ocurrido en el ejercicio propuesto, los estudiantes no han logrado reconocer que para esta acción solicitada se requiere una medida de área o de superficie sino que recurren a lo que perceptivamente les representa la forma cuadrada o rectangular.

Lo mismo sucede cuando los estudiantes proponen en el primer ejercicio que no siempre quedan partes iguales:

> *Est. 18: "Si, porque así los doblemos, y den las mismas partes iguales, algunos quedan anchos, angostos o largos".*
> *Est. 9 "Si, algunas quedan horizontales y verticales y otros quedan solamente verticales y horizontales".*
> *Est. 25: "El tamaño varia si lo doblamos en cuadros porque si lo doblamos todo horizontalmente queda mas ancho que si lo doblamos todo verticalmente".*

Continua siendo reiterativo el que no se reconoce la unidad de medida, es decir, no se presenta evidente ante los estudiantes la magnitud de área o de superficie sobre la cual se fundamenta el ejercicio propuesto.

En otro momento del proceso en donde también se recurre a la medida, se nota una aproximación a ésta, como mecanismo de partición, históricamente y de acuerdo con Chamorro (1991, 127), "*la construcción de los números racionales como extensión de los enteros es consecuencia de la medición de magnitudes"*; al trabajar en esta aproximación se ubica primero un 'todo' (continuo o discreto), el cual se divide en partes congruentes (puede ser de las partes de una superficie o la cantidad de objetos), la medida es la relación entre la parte y el todo.

De acuerdo con Dickson (1991, 94) Las operaciones fundamentales en el proceso de medida son la conservación y la transitividad:

Conservación es la invarianza de una situación, por ejemplo, la longitud de un pasillo seguirá siendo la misma indiferente de la dirección que uno recorra. La apreciación de elementos invariantes de una situación es fundamental para desarrollar el proceso de medida.

Transitividad si se es capaz de tener un referente con el cual se puedan comparar dos magnitudes, se puede decir que se esta desarrollando la noción de transitividad. Cualquiera que sea la situación de medida, toda utilización de un instrumento de medida que este provista de significado descansa en la noción de transitividad.

Se puede pensar que se empieza a desarrollar la noción de transitividad y conservación cuando utiliza como instrumento de medida algún elemento intermediario. Se podría determinar que se ha alcanzado el proceso de medida cuando hay conciencia de que el espacio es un conjunto infinito y continuo de puntos.

La acción de medir supone la reiteración de una unidad de medida, es decir debe haber una noción de división que es repetida sobre la totalidad de la extensión de la magnitud que se ésta considerando y esta repetición ha de ser tal que el intervalo que hay que medir debe estar recubierto o lleno por la unidad de medida.

Otro de los aspectos importantes en el desarrollo de las nociones asociadas al proceso de medida es la comprensión de la relación entre el tamaño de la unidad y el número necesario para medir la cantidad dada, esto quiere decir que cuanto menor sea la unidad de medida, tantas más veces será preciso repetirla, hasta "cubrirla" toda. En este sentido, la base de todo proceso de medida es en primera instancia la identificación de la unidad con que se mide, es decir, cierta idea de subdivisión expresada en función de cierta unidad de medida, que es repetida sobre la totalidad de la magnitud que se esté considerando.

Para los estudiantes, en la exploración de ideas previas, la constitución de la unidad o magnitud es en primera instancia inherente al aspecto visual, ligado al objeto sobre el cual se está repartiendo, lo que nos lleva a corroborar lo que reiterativamente se ha dicho, la partición se asume por la forma del objeto a dividir y no por su magnitud.

El concepto de unidad en esta primera aproximación al concepto de medida y por consiguiente de numero racional, esta ligada a un objeto, pero puede cambiar de un objeto a otro, siempre y cuando estos objetos se encuentren relacionados.

Reconociendo otros aspectos que entran en juego a la hora de realizar particiones de magnitudes, en los casos propuestos, el estudiante debía recurrir a la partición de áreas, lo que representa una confusión mayor, por la gran influencia que ejerce la forma en esta magnitud, pues los estudiantes cuando identifican una superficie lo hacen en primer lugar, a través de la forma, de ahí que cualquier cambio en ella, no permita mantener la conservación de superficie.

Los fraccionarios como partidores pueden generar confusiones entre las operaciones físicas sobre objetos y los operadores conceptuales sobre magnitudes, es posible que no permitan la abstracción empírica y reflexiva. De acuerdo con Dickson (1991, p.297), existen algunos criterios para la comprensión de la acción física de la relación parte – todo de una fracción, en los que podríamos reconocer la ubicación de las evidencias de los estudiantes:

Cuando se dice que "*una región entera es considerada divisible*"; se manifiesta en los estudiantes la posibilidad de dividir o repartir en partes lo que antes era considerado una unidad indivisible:

> *Est.26:"La única forma seria dividir en tres partes una sola hoja y no utilizar la otra.*
> *Est. 4: "Que los estudiantes reciban un 1/3 de hoja de papel".*

Est.37: "Se une la otra hoja y se divide en tres partes horizontales.
Est. 5: "Muy fácil se doblaba la hoja se le daba _ de 4 partes de cada hoja y así los tres estudiantes quedaban con la misma cantidad".

Se esperaba que de acuerdo con la situación planteada, el estudiante podía tener dos opciones, una de ellas tomar consecutivamente cada hoja y dividirla en tres partes o considerar las dos hojas como una unidad hacer una partición mixta, reconociendo una composición aditiva de dos o mas fracciones.

De acuerdo con Valdemoros (2004), los estudiantes evidencian una comprensión básica de los problemas presentados pero no logran una identificación de la fracción. Tal es el caso de las siguientes evidencias:

También se presentan acciones en donde el todo se considera una sola hoja, debido a la imposibilidad de manejar "todos", compuestos por cantidades discretas, por ello se recurre a los siguientes métodos de partición:

Est. 13: "La hoja se divide en 3 partes iguales y la otra se bota a la basura".
Est. 27: "No se puede porque nosotros habíamos partido el papel en 4 partes iguales y después repartir en 3 alumnos tres hojas pero ellas tenían 2".
Est. 7: "Para poderlo hacer deberían de dividir las 2 hojas y repartirían y sobraría 1".
Est. 8: "Se puede repartir porque hay dos hojas y estas se doblan para que queden 3 y así no sobra ninguna porque para los tres hay hojas dobles".

Hay una tendencia a mantener el concepto de unidad para poder hacer la división en partes iguales. La unidad se considera como un todo que se puede dividir, para este caso planteado, el entender la unidad como dos hojas, los estudiantes requieren conformar un todo para poder dividirlo en partes iguales, por ello recurren a unir las dos hojas o a realizar el mismo procedimiento pero con cada hoja independientemente.

El concepto de fracción tal como se ha dicho en este texto, surge de la necesidad de fraccionar la unidad, pues históricamente los babilonios y los egipcios fraccionaban la unidad según sus sistemas de numeración, reconociendo la infinitud de veces en que la unidad puede ser "partida". Chamorro (2003).

Est.11: "Mientras hayan mas partes en las que se tenga que dividir la unidad, cada pedazo se vuelve más pequeño".

Además de asumir que el todo se puede dividir en cualquier número de partes, los estudiantes también reconocen que mientras haya más partes en que tenga que dividir, estas serán más pequeñas.

Conclusiones

Las representaciones semióticas se convierten en un aspecto fundamental en la enseñanza matemática, debido a que el objeto matemático si se considera posible de ser representado debe estar compuesto por su representación y el contenido de la misma. De acuerdo con Castro, Rico y Romero (1997) "*el conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar una estructura matemática han de responder a su carácter sistémico, por ello se habla de sistemas matemáticos de signos (*Kieran y Filloy, 1989*), sistemas de notación (*Kaput, 1992*) o sistemas semióticos (*Duval, 1999*);* que para este estudio nos permite referirnos a aquellos signos que son representaciones externas, son conscientes por parte del sujeto y pueden ser compartidas por un colectivo de estudiantes.

La dicotomía número – magnitud ha generado obstáculos a la hora de comprender los racionales, desde el número todo está ligado a lo discreto, lo contable y desde la magnitud se reconoce lo continuo es decir lo medible.

La relación parte – todo es quizás uno de los conceptos por medio de los cuales podemos acceder a otros conceptos en la comprensión del numero racional, es el puente de entrada en la conceptualizacion de la unidad como todo divisible en partes mas pequeñas sin que deje de ser unidad, es el camino natural para la comprensión de las propiedades, relaciones y operaciones, pero fundamentalmente se constituye en el referente a partir del cual se puede definir la unidad a partir de la magnitud y la cantidad.

El proceso de partición para los estudiantes universitarios, no se basa en la medida de la magnitud que se desea repartir sino que este proceso se realiza a partir de acciones visuales que privilegian la congruencia de las formas como sentido de igualdad, de allí que las particiones que realizan no contemplan la posibilidad de hacer particiones en otras formas geométricas diferentes a la cuadrada o rectangular.

En el proceso de enseñanza de los números racionales, no se hace un tratamiento cuidadoso ni del concepto de unidad, privilegiando las cantidades discretas que las continuas, así como del concepto de magnitud sin reconocer que tanto los tipos de cantidades como las diferentes magnitudes merecen tratamientos distintos.

Pensar la fracción como relación parte – todo implica pensar en procesos de medición con miras a establecer la cuantificación de la parte y del todo, lo que en los procesos de enseñanza actual no es considerado.

Referencias

Centeno, J. (1988). *Números decimales*. Síntesis. Madrid.

Chamorro M. C., (1991) *El problema de la medida.* Síntesis Madrid.

Cortes, H., Pérez, (2003). *Algunas dificultades en la comprensión y aplicación del concepto de número fraccionario*. Fundación Universitaria Panamericana. Bogota, Colombia.

D'amore, B. (2006) Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido en *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* México

Dickson, L. Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas.* Barcelona. *Ed. Labor*.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Editorial Universidad del Valle. Colombia.

Duval, R. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación.* La Gaceta de la RSME, Vol. 9.1:143–168.

Godino, J.D y Batanero, C. (1994) *Significado personal e institucional de los objetos matemáticos* en Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol. 14, nº 3, pp. 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1996). *Relaciones dialécticas entre teoría, desarrollo y práctica en educación matemática: Un meta-análisis de tres investigaciones*. En: N. Malara (Ed), An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline (pp. 13-22). Universidad de Módena.

LLinares, S. y Sánchez, Mª V. (1988). *Fracciones*. Síntesis. Madrid.

LLinares, S. (2003) *Fracciones, decimales y razón desde la relación parte – todo al razonamiento proporcional en* Didáctica de las Matemáticas para primaria. Chamorro M. C Pearson Prentice Hall. España. p. 186 - 220

Méndez, J. M., (2003) *Las Matemáticas su historia, evolución y aplicaciones. Lección Inaugural del curso académico 2003 – 2004.*

Obando, G., (2003) *Trascender los números naturales. Documento de trabajo.*

Obando, G. (2003). *La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte – todo* en Revista EMA. Vol. 8. No. 2. (1 – 27)

Obando G., (2007) *Lo ostensivo y lo no ostensivo en la constitución de objetos matemáticos.* Documento presentado en el curso doctoral virtual sobre teoría de la Educación Matemática. Medio electrónico.

Rico, L., Castro E., Romero I., (1997). *Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori.

Rios, (2007) *Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción* en Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. No.20

Ruiz Higueras M. L., (2003) *La construcción del número natural y la numeración* en Didáctica de la Matemática para primaria. CHAMORRO M. C. España. Pearson Prentice Hall. P. 93 – 129.

Valdemoros, M. E., (2004) *La fracción en la escuela elemental de Adultos, el caso de Lucina* en la 28 Conferencia de Psicología de la Educación Matemática PME. CINVESTAV. México.

Valdemoros, M. E., (2004) *Lenguaje, fracciones y reparto* en Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CINVESTAV. México.

Vasco C. E (1994). *El Archipiélago Fraccionario*. Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Tomo II. Serie Pedagogía y Currículo. Ministerio de Educación Nacional. p. 23 – 47.

Sobre los autores

Saúl Osbaldo Aponte López
Ingeniero de Sistemas de la Universidad Antonio Nariño sede Ibagué. Docente universitario en la Universidad Cooperativa de Colombia sede Ibagué y la Universidad del Tolima, modalidad a distancia. Posee estudios de Maestría en Educación y Desarrollo Humano del CINDE y la Universidad de Manizales.

Ligia Inés Garcia Castro
Licenciada en Educación y Orientación Escolar, Magíster en Pedagogías Activas y Desarrollo Humano. Docente e Investigadora de la Universidad Autónoma de Manizales. Coordinadora de la línea de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias, aspirante a doctorado en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud con la tesis doctoral sobre el aprendizaje del concepto de numero racional en estudiantes de educación básica.