

## ENSEÑANZA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EN INGENIERÍA CIVIL Y MECÁNICA UTILIZANDO EL PROGRAMA DE COMPUTADOR A CÓDIGO ABIERTO PEFICA

### *TEACHING OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN CIVIL AND MECHANICAL ENGINEERING USING OPEN-SOURCE PEFICA SOFTWARE*

**Dorian Luis Linero Segrera, Diego Alexander Garzón-Alvarado**  
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (Colombia)

#### Resumen

Este trabajo presenta las características del programa a código abierto *PEFiCA*, utilizado como herramienta para la enseñanza del método de los elementos finitos en ingeniería civil y mecánica. *PEFiCA* tiene como objetivo principal motivar, estimular y facilitar el aprendizaje del método de los elementos finitos aplicado a problemas específicos de mecánica de sólidos y de fluidos. El programa permite resolver la ecuación diferencial de campo bidimensional de *Poisson* que tiene aplicación a problemas de flujo irrotacional, infiltración del agua en suelos permeables, transferencia de calor y distribución de esfuerzos cortantes en barras sometidas a torsión. Asimismo, el programa puede calcular el campo del esfuerzo y la deformación en un problema mecánico elástico lineal estático en condición plana de esfuerzos y en condición plana de deformaciones. Este tipo de problemas tienen gran aplicación en ingeniería estructural, ingeniería mecánica y geotecnia. *PEFiCA* permite que el usuario observe, entienda e implemente cada una de las etapas de cálculo, tal que participe activamente en la elaboración del procedimiento principal a partir de las subrutinas preexistentes o mediante nuevas rutinas creadas por él mismo. *PEFiCA* ha sido utilizado en el aula de clase, por estudiantes de Ingeniería Civil y de Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, durante más de dos años. Los profesores indican que el programa facilita el vínculo entre la exposición de los conceptos básicos del método de los elementos finitos y su aplicación a problemas prácticos sin importar su tamaño. Además se concluyó que los usuarios de *PEFiCA* conocieron el interior del método de los elementos finitos, más allá del simple entrenamiento de introducir datos y observar resultados.

**Palabras clave:** método de los elementos finitos, programas de computador a código abierto, aprendizaje asistido por computador

## Abstract

This work presents the features of open-source PEFiCA software, using as tool in order to teach the finite element method in civil and mechanics engineering. To motivate, stimulate and supply the learning of the finite element method applied to problems of solid and fluid mechanics is the main objective of PEFiCA. The software allows solving the two-dimensional field differential equations of Poisson, which is applied to problems of irrotational flow, seepage of groundwater flow, heat transfer and shear stresses in bars subjected to torsion. Likewise, the software can calculate the stress and strain field in static linear elastic mechanical problem in plane stress condition and in plane strain condition. This problem type has important application on structural, mechanical and geotechnical engineering. PEFiCA allows that the user observes, understands and implements each one of the solve steps, so that, it takes an active part in the development of the main routine through the existing subroutines or by means of new subroutines make by itself. PEFiCA has been used at the classroom by students of civil engineering and structural engineering at the Universidad Nacional de Colombia during more than two years. The teachers indicate that the software provides the link between the presentation of the basic concepts of the finite element method and its application to practical problems, without regard its size. Moreover, we conclude that PEFiCA users knew the inner of finite element method, besides the simple coaching of input data and results presentation.

**Keywords:** finite element methods, open-source software, computer assisted learning

## Introducción

Muchas universidades han incluido la simulación numérica del comportamiento mecánico de sólidos y fluidos mediante el método de los elementos finitos (Reddy, 2005; Zienkiewicz, et al., 2005), en la formación de ingenieros civiles y de ingenieros. Entre los años 1993 y 2008, una asignatura obligatoria del programa curricular de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá, presentaba los conceptos básicos del método de los elementos finitos. Actualmente, este programa curricular cuenta con una asignatura electiva relacionada con este tema. Asimismo, las Maestrías en Estructuras y en Geotecnia incluyen en la simulación numérica de sólidos, en sus asignaturas electivas Análisis Estructural por Elementos Finitos y Métodos Numéricos en Geotecnia, respectivamente. En cambio, el programa de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia incluye el estudio del método de los elementos finitos en el curso obligatorio Aplicaciones de Elementos Finitos desde 2009. En las Maestrías en Ingeniería Mecánica e Ingeniería de Materiales y en los Doctorados en Ingeniería Mecánica y en Ciencia y Tecnología de Materiales se ofrece una asignatura electiva que profundiza sobre el tema.

En los años sesenta después de establecidos los conceptos básicos del análisis matricial, comienza el desarrollo de

programas aislados de simulación numérica con propósito específico. Mediante un proyecto de cooperación de la NASA surge en 1968, uno de los primeros programas de elementos finitos de uso general denominado NASTRAN. Desde entonces se han desarrollado muchos programas de computador con objetivos similares. En la actualidad se encuentran algunos programas comerciales como el ABACUS, ALGOR, ANSYS, COSMOS y ADINA, entre otros, que permiten la simulación numérica de problemas multifísicos con gran eficiencia y comodidad para el usuario. Sin embargo, la mayoría de estos programas no permiten cambiar su código fuente actuando como una caja negra para el usuario.

Por otro lado, los centros de investigación en el área han desarrollado programas a código abierto, es decir, grupos de rutinas observables y modificables, que después de ser compiladas en conjunto generan un programa ejecutable de elementos finitos. Entre los más populares se encuentran los programas escritos en lenguaje FORTRAN como el FEAP (Taylor, 2008) y el COMET, y las herramientas ejecutables en el programa MATLAB como el FEMLAB y CALFEM.

En la Universidad Nacional de Colombia se desarrolló el Programa Didáctico de Elementos Finitos – Euler (Linero, 1999), el cual proporcionaba al usuario un grupo de instrucciones fijas con las cuales se podrían

resolver algunos problemas de campo y de elasticidad unidimensional y bidimensional. Durante tres años este programa fue incorporado en las asignaturas correspondientes en los programas curriculares de Ingeniería Civil y de Maestría en Ingeniería – Estructuras. La respuesta de los estudiantes reveló las fortalezas y debilidades de la herramienta, dando paso a la creación del nuevo programa denominado PEFiCA, acrónimo que significa Programa de Elementos Finitos a Código Abierto (Linero, 2009).

### 1. Objetivos y estructura del programa PEFiCA

El programa PEFiCA tiene como objetivo principal motivar, estimular y facilitar el aprendizaje del Método de los Elementos Finitos (MEF) en el campo de la ingeniería civil y de la ingeniería mecánica, a través del uso de subrutinas preestablecidas para resolver un problema específico. Con este programa se busca que el usuario participe activamente del proceso de aprendizaje en el tema, escribiendo el código del procedimiento principal de cálculo invocando a las subrutinas existentes o mediante nuevas rutinas

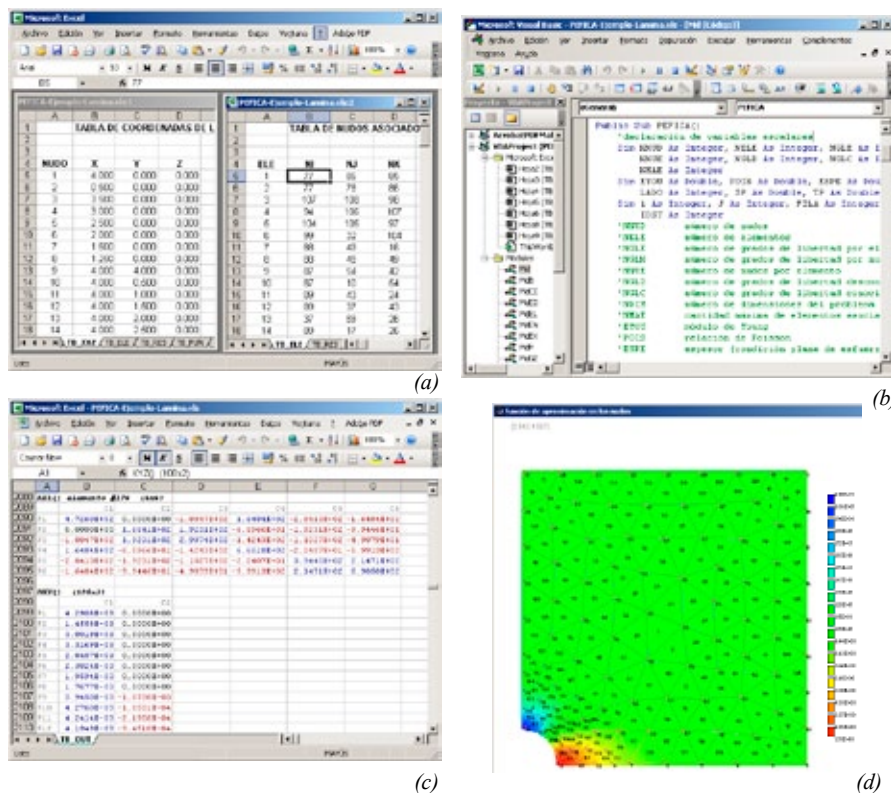
creadas por él mismo. En consecuencia, el usuario podrá concentrarse en el algoritmo general, porque no tendrá que programar los procedimientos básicos de entrada de datos, visualización de resultados, solución de un sistema de ecuaciones simultáneas, ensamblaje de una matriz o creación de la matriz de rigidez del elemento finito, entre otros.

El programa está conformado por un libro de Microsoft® Office Excel® que contiene los datos y las rutinas del proceso denominado PEFiCA.xls y por otro programa ejecutable llamado PEFiCAGraf.exe el cual genera las gráficas resultantes del análisis.

El libro PEFiCA.xls contiene un grupo de hojas de cálculo que almacena los datos de entrada y de salida, asociados al proceso de cálculo escrito y compilado en los módulos de Visual Basic for Applications® (VBA).

Se escogió a Microsoft® Office Excel® como plataforma para el programa PEFiCA por su popularidad y familiaridad entre los ingenieros y el público en general. En consecuencia, no se requiere un compilador diferente al incluido en Visual Basic for Applications® dentro de Microsoft® Office Excel®.

Figura 1. Etapas de cálculo con el programa PEFiCA: (a) hojas de entrada de datos, (b) módulo de Visual Basic for Applications®, (c) hoja de salida de resultados, (d) postproceso gráfico de resultados



El programa puede leer el valor de las celdas de las hojas de cálculo que contengan la información básica del problema. Las hojas de entrada de datos constituyen el pre procesador del programa de elementos finitos, como lo indica Figura 1(a). En cada una de ellas se almacena parte de la información del problema, como las coordenadas de los nudos, las conectividades de los elementos y las fuerzas aplicadas, entre otras. La hoja de salida de datos mostrada en la Figura 1(c), se utiliza para presentar los resultados del problema a través de las matrices escogidas por el usuario. Asimismo, se pueden generar gráficos de líneas de contorno y de regiones llenas de una variable, a nivel elemental o nodal, sobre la malla de elementos finitos, como se ilustra en la Figura 1(d).

Los módulos de Visual Basic for Applications® (VBA) contienen las subrutinas del proceso de cálculo clasificadas de acuerdo con su objetivo dentro del método de los elementos finitos (Figura 1(b)). En uno de los módulos se encuentra la rutina principal de cálculo PEFiCA.

## 2. Metodología

Para dar solución a los diferentes tipos de problemas, las subrutinas del programa crean la matriz de funciones de forma, la matriz de operadores diferenciales actuando sobre funciones de forma, el vector de fuerzas y la matriz de rigidez de diferentes elementos finitos. La librería de elementos finitos incluye al elemento unidimensional lineal y cuadrático, a los elementos triangular lineal y rectangular bilineal de campo, y a los elementos triangular lineal y rectangular bilineal de elasticidad. Otro grupo de subrutinas permite, calcular el vector solución de un sistema de ecuaciones simultáneas linealmente independiente y los valores y vectores propios de un sistema de ecuaciones homogéneo, entre otras operaciones matriciales. También existen rutinas que *ensamblan* matrices y vectores de acuerdo con la numeración de los valores nodales o grados de libertad del problema (Reddy, 2005; Zienkiewicz et al., 2005).

Con las rutinas incluidas en la primera versión de PEFiCA se resuelven los siguientes problemas particulares en ingeniería mediante el método de los elementos finitos.

El programa soluciona de *forma débil* la siguiente ecuación diferencial de campo unidimensional (ED), con su respectiva condición de borde esencial en el contorno  $\Gamma_\phi$  (CB) (Hughes, 2000).

$$\begin{aligned} \text{(ED)} \quad D \frac{d^2\phi}{dx^2} + Q &= 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \text{(CB)} \quad \phi(x) &= \phi_0 \quad \forall x \in \Gamma_\phi \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $D(x)$  y  $Q(x)$  son parámetros de la ecuación diferencial y  $\phi(x)$  es el campo escalar de interés en un dominio unidimensional  $\Omega$ . La ecuación anterior representa problemas como deflexión de vigas, alargamiento de barras sometidas a fuerza axial distribuida y transferencia de calor unidimensional.

De igual manera, se puede resolver la ecuación diferencial parcial de campo bidimensional denominada en ocasiones ecuación de Poisson (ED), considerando condiciones de borde esenciales (CBE) y naturales (CBN) (Hughes, 2000), de la forma:

$$\begin{aligned} \text{(ED)} \quad D_x \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - G\phi + Q &= 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \\ \text{(CBE)} \quad \phi(x, y) &= \phi_0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_\phi \\ \text{(CBN)} \quad \partial_x\phi(x, y) &= \phi'_{0x} \quad \wedge \quad \partial_y\phi(x, y) = \phi'_{0y} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_{\phi\phi} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $D_x(x, y)$ ,  $D_y(x, y)$ ,  $G(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son los parámetros de la ecuación diferencial y  $\phi(x, y)$  es el campo escalar de interés en un dominio bidimensional  $\Omega$ . La ecuación anterior representa varios fenómenos en Ingeniería, tales como: distribución de esfuerzos cortantes en barras prismáticas de sección transversal arbitraria sometidas a torsión pura, líneas de potencial y de corriente en flujo irrotacional, infiltración del agua en suelos permeables y transferencia de calor bidimensional.

Como resultado de plantear la solución de la ecuación diferencial anterior mediante el método de Galerkin, en el marco del método de los elementos finitos, se debe satisfacer la siguiente ecuación matricial (Reddy, 2005; Zienkiewicz et al., 2005).

$$\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez y  $\mathbf{f}$  es el vector de términos independientes del medio. La matriz  $\mathbf{K}$  es el resultado del ensamblaje de la matriz de rigidez

$\mathbf{K}^{(e)}$  de cada uno de los  $m$  elementos finitos. Asimismo, el vector  $\mathbf{f}$  se obtiene del ensamblaje de los vectores de términos independientes  $\mathbf{f}^{(e)}$  de cada elemento finito, es decir:

$$\mathbf{K} = \underset{(e)=1}{\overset{m}{\mathbb{A}}} \mathbf{K}^{(e)}, \quad \mathbf{f} = \underset{(e)=1}{\overset{m}{\mathbb{A}}} \mathbf{f}^{(e)} \quad (4)$$

Conocida la matriz de funciones de forma  $\mathbf{N}^{(e)}$  y la matriz de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma  $\mathbf{B}^{(e)}$  de un elemento finito de dominio  $\Omega^{(e)}$ , se puede obtener su matriz de rigidez como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} d\Omega^{(e)} + \int_{\Omega^{(e)}} G^{(e)} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)} d\Omega^{(e)} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{D}^{(e)}$  es una matriz diagonal que contiene a los parámetros de la ecuación diferencial

$$D_x^{(e)} = D_x(x, y), D_y^{(e)} = D_y(x, y) \forall (x, y) \in \Omega^{(e)} \quad \text{y} \quad G^{(e)} = G(x, y) \forall (x, y) \in \Omega^{(e)}$$

Asimismo, el vector de términos independientes de un elemento finito para la solución de la Ecuación (2), se calcula así:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} Q^{(e)} dA \quad (6)$$

siendo  $Q^{(e)} = Q(x, y) \forall (x, y) \in \Omega^{(e)}$

En la Ecuación (3), el vector  $\mathbf{a}$  contiene los valores de la función de aproximación en los nudos de la malla, el cual está dividido en los subvectores de valores nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\beta$  y de valores nodales conocidos  $\mathbf{a}_\alpha$ . Este último está determinado por las condiciones de borde esenciales del problema. Por lo tanto, la Ecuación (3) se puede describir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\alpha \\ \mathbf{a}_\beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  se ha dividido en las submatrices  $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ,  $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ ,  $\mathbf{K}_{\beta\alpha}$  y  $\mathbf{K}_{\beta\beta}$ , de acuerdo con el número de valores nodales (o grados de libertad) desconocidos y conocidos de la malla. Por las mismas razones el vector de fuerzas nodales  $\mathbf{f}$  está conformado por los subvectores  $\mathbf{f}_\alpha$  y  $\mathbf{f}_\beta$ . En consecuencia, la ecuación anterior se transforma en dos ecuaciones matriciales de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\alpha = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1} (\mathbf{f}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta) \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta} \mathbf{a}_\beta - \mathbf{f}_\beta = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{f}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta} \mathbf{a}_\beta \end{cases} \quad (8)$$

Con la primera de las ecuaciones matriciales se obtiene el vector de valores nodales desconocidos, que corresponde a la cantidad de interés del problema.

Por otro lado, *PEFiCA* permite obtener el campo de los desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , de las deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  y de los esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  de un sólido sometido a fuerzas estáticas en condición plana de esfuerzos o de deformaciones, considerando que las deformaciones son infinitesimales y que el material es elástico lineal isótropo. Estos resultados son calculados a partir del principio de los trabajos virtuales, la ecuación constitutiva del material y



la relación entre los campos de la deformación y del desplazamiento, expresados en las siguientes ecuaciones (Linero & Garzón, 2010; Reddy, 2008):

$$\int_V (\nabla^s \delta \mathbf{u})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS + \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \sum_{n=1}^r \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (11)$$

donde  $\delta \mathbf{u}$  es el vector de desplazamiento virtual y  $(\nabla^s \delta \mathbf{u})$  es la matriz columna de la deformación causada por el desplazamiento virtual. Asimismo, y  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)$  y  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$  son los vectores de desplazamiento virtual y de la fuerza puntual real de una partícula ubicada en la posición  $\mathbf{x}_n$  y el parámetro  $r$  indica el total de puntos materiales donde se aplica una fuerza puntual. Los vectores  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{p}$  corresponden a las fuerzas reales externas de cuerpo en el volumen  $V$  y de superficie en el contorno  $\Gamma_i$ . La matriz constitutiva elástica  $\mathbf{C}$  depende del módulo de Young y de la relación de Poisson del material.

En el método de los elementos finitos, las integrales en el volumen  $V$  del sólido de la Ecuación (9), se

convierten en la sumatoria de las integrales evaluadas en el dominio  $V^{(e)}$  de cada elemento finito. Lo anterior conlleva a una solución matricial del problema expresado en las ecuaciones (3) y (4), donde el vector  $\mathbf{a}$  contiene los valores de las componentes del desplazamiento en los nudos de la malla, el cual está dividido en los subvectores de desplazamientos nodales desconocidos  $\mathbf{a}_\alpha$  y de desplazamientos nodales conocidos  $\mathbf{a}_\beta$ , como lo indican las ecuaciones (7) y (8).

Dadas las matrices de funciones de forma  $\mathbf{N}^{(e)}$  y de operadores diferenciales actuando sobre las funciones de forma  $\mathbf{B}^{(e)}$  de un elemento finito, su matriz de rigidez y su vector de términos independientes de obtienen de las siguientes expresiones:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV \quad (12)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} dS + \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{b}^{(e)} dV \quad (13)$$

donde  $\mathbf{C}^{(e)}$ ,  $\mathbf{p}^{(e)}$  y  $\mathbf{b}^{(e)}$  corresponden a la matriz constitutiva elástica, el vector de fuerzas de superficie y el vector de fuerzas de cuerpo en el interior del elemento ( $\forall \mathbf{x} \in V^{(e)}$ ), respectivamente.

Después de calculadas las componentes de desplazamiento en los nudos de la malla, se obtienen las componentes de deformación y de esfuerzo en el interior de cada elemento finito mediante las ecuaciones (10) y (11).

### 3. Resultados

#### 3.1 Distribución de esfuerzos cortantes en barras prismáticas sometidas a torsión pura

El método semi-inverso de Saint-Venant (Linero & Garzón, 2010; Reddy, 2008) permite obtener el estado de esfuerzos en barras de sección transversal constante sometidas a torsión pura, cuyo material es lineal elástico. Este método es una simplificación

del problema de elasticidad tridimensional en la cual se obtiene la distribución de esfuerzos cortantes en un dominio bidimensional correspondiente a la sección transversal de la barra.

Después de aplicar las ecuaciones de gobierno de la elasticidad y considerando que  $z$  es el eje longitudinal de la barra y  $xy$  es el plano de la sección transversal, se obtiene la siguiente ecuación diferencial bidimensional de campo,

$$\left(\frac{1}{2\mu\theta}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2\mu\theta}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + 1 = 0 \quad (14)$$

donde  $\mu$  es el módulo de elasticidad a cortante,  $\theta$  es el ángulo de torsión por unidad de longitud y  $\phi(x, y)$  es la cantidad de interés denominada *función de Prandtl*. Las condiciones de borde corresponden a  $\phi(x, y) = 0$  en el contorno externo de la sección transversal  $\Gamma_\phi \subset \partial\Omega$ , es decir:

$$\phi(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_\phi \quad (15)$$

Asimismo, las derivadas de la *función de Prandtl* están asociadas a los esfuerzos cortantes de la forma:

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad ; \quad \sigma_{zy} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (16)$$

y el doble de la integral de tal función en el área de la sección transversal corresponde el momento torsor actuante  $M$ , así:

$$M = 2 \int_A \phi dA \quad (17)$$

A partir de la relación entre el momento torsor aplicado  $M$  y el ángulo de torsión por unidad de longitud  $\theta$ , se puede despejar la constante torsional  $J$  de la sección transversal de la forma:

$$M = \mu J \theta \quad \rightarrow \quad J = \frac{M}{\mu\theta} \quad (18)$$

Se observa que la Ecuación (14) es un caso especial de la ecuación diferencial de campo bidimensional (2), la cual se puede resolver forma analítica para una sección transversal de geometría sencilla y de material homogéneo (Reddy, 2008), o mediante el método de los elementos finitos para una sección transversal de geometría cualquiera y compuesta por uno o varios materiales (Herrera, 2007).

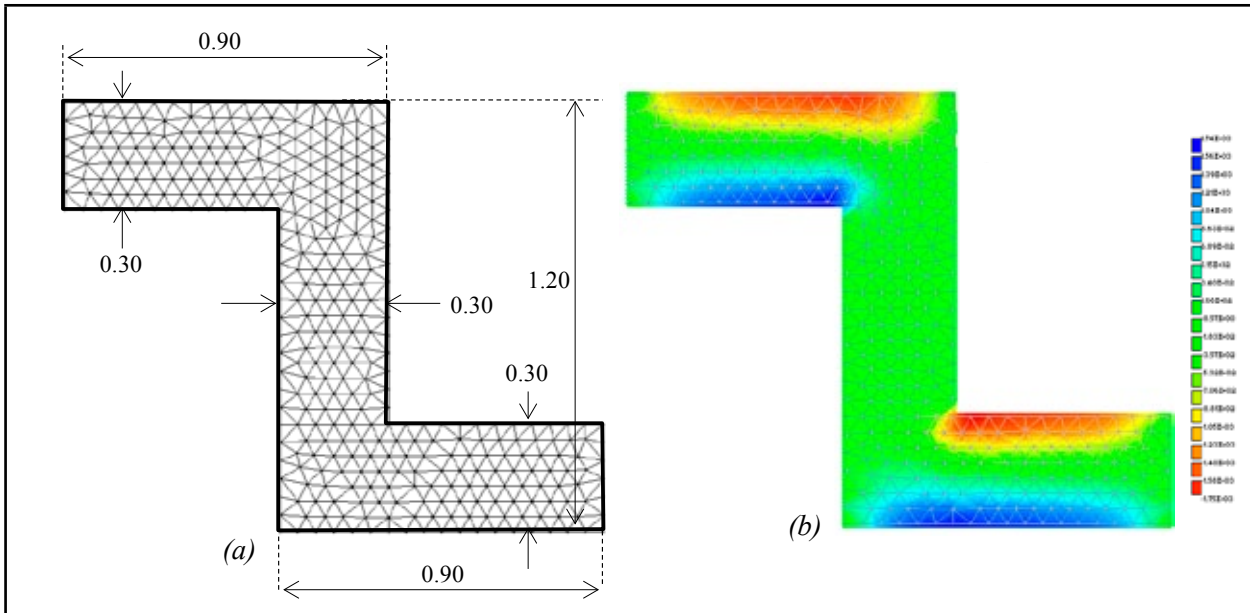
Después de planteado el problema, los estudiantes podrán combinar las subrutinas existentes en el programa *PEFiCA* para obtener la distribución de

esfuerzos cortantes y la constante torsional en barras prismáticas sometidas a torsión pura.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en una barra de sección transversal en forma de zeta, hecha de un concreto con módulo de elasticidad a cortante es  $8.6 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>, la cual está sometida a un momento torsor de 120 kN-m. La Figura 2(a) muestra la geometría de la sección transversal y la malla de elementos finitos utilizada, mientras que la Figura 2(b) ilustra la distribución del esfuerzo cortante  $\sigma_{zx}$ .

Figura 2. Barra prismática sometida a torsión pura de sección transversal tipo zeta:

(a) geometría y malla de elementos finitos, (b) distribución de la componente de esfuerzos cortantes en el plano zx



### 3.2 Infiltración del agua en suelos permeables

Un problema particular de la mecánica de fluidos, consiste en encontrar el campo escalar de la cabeza

piezométrica del agua infiltrada en un suelo permeable. La ecuación fundamental del flujo potencial de agua en suelos en un medio bidimensional es una simplificación de la Ecuación (2), de la forma:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (19)$$

donde  $\phi(x, y)$  es la cabeza piezométrica medida desde una línea de referencia, y  $k_x$  y  $k_y$  son las permeabilidades del suelo en dirección  $x$  y  $y$  respectivamente. Las condiciones de borde generalmente corresponden a regiones del medio con valores conocidos de la cabeza piezométrica o donde la infiltración es nula.

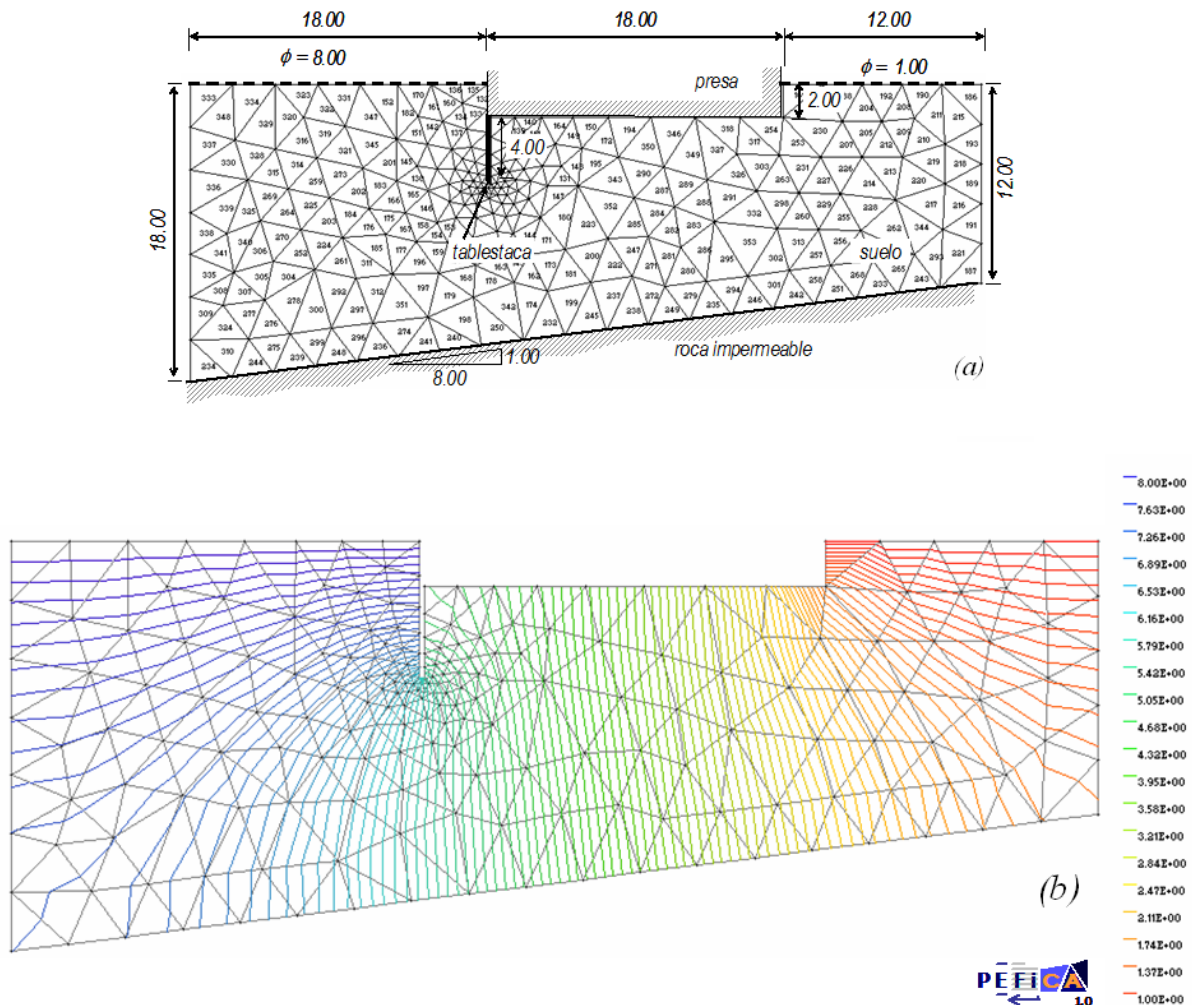
Como ejemplo de aplicación, se supone una presa y una tablestaca impermeables que controlan el agua manteniendo una cabeza piezométrica de 8.00m a la izquierda y 1.00m a la derecha como lo muestra la Figura 3(a). El agua se infiltra a una tasa  $k_x = k_y = 1.8m/h$  en un suelo permeable limitado por un lecho inclinado de roca impermeable y por la misma presa. Se desean obtener las líneas de igual cabeza piezométrica del agua en el suelo.

El dominio del problema es el suelo permeable ubicado 18.00m a la izquierda y 12.00m a la derecha de la presa, y limitado abajo por la roca impermeable. La malla tiene 353 elementos finitos triangulares lineales y 210 nudos, como lo indica la Figura 3(a). Las condiciones de borde corresponden a  $\phi = 8.00m$  y  $\phi = 1.00m$  en los nudos de la capa superior del suelo a la izquierda y a la derecha de la presa, respectivamente.

Utilizando las rutinas del programa *PEFiCA* se puede obtener la cabeza piezométrica en los nudos y a partir de estas dibujar las líneas de igual cabeza piezométrica en el suelo permeable, como lo muestra la Figura 3(b).



Figura 3. Ejemplo de aplicación de la infiltración del agua en suelos permeables: (a) esquema del problema y malla de elementos finitos, y (b) líneas de igual valor de cabeza piezométrica del agua



### 3.3 Problema mecánico elástico lineal estático

Las componentes del desplazamiento, de la deformación y del esfuerzo en un sólido sometido a cargas estáticas, formado por uno o varios materiales lineales elásticos, se obtienen resolviendo de forma discreta las ecuaciones de gobierno (9), (10) y (11), mediante el método de los elementos finitos. A continuación se presenta un ejemplo en el cual se simplifica el problema a una condición plana de esfuerzos.

La ménsula de concreto ilustrada en la Figura 4(a), soporta una reacción vertical de 2500 kN/m<sup>2</sup> dada por el extremo de una armadura. El material tiene un módulo de Young de  $20.0 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup> y una relación de Poisson de 0.25.

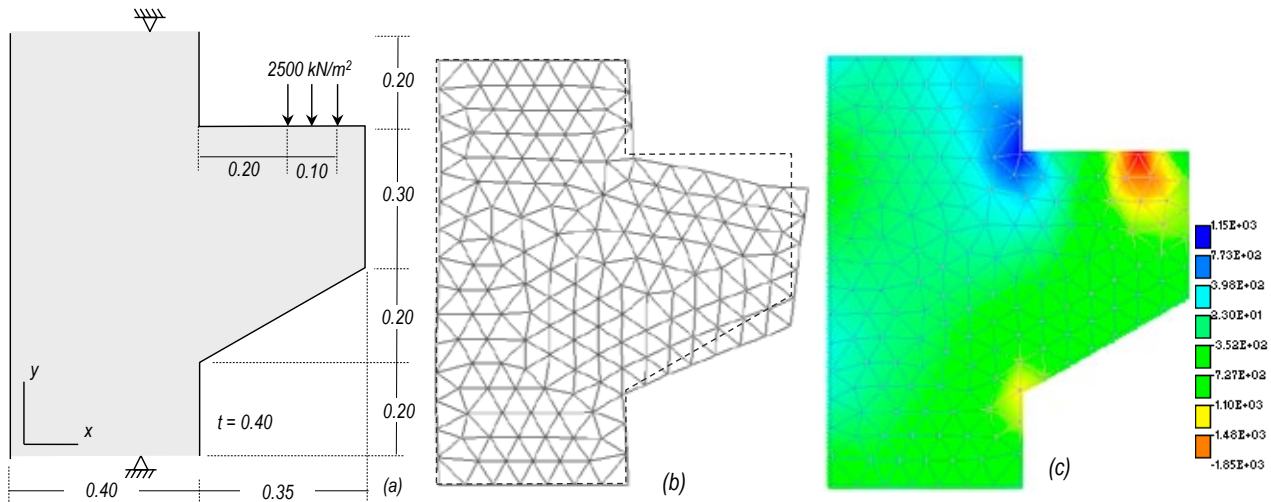
El dominio modelado contiene el volumen de la ménsula y de un tramo de columna 0.20m por encima y por debajo de la ménsula con espesor de 0.40m, el cual se subdivide en 303 elementos triangulares lineales conectados entre sí por 179 nudos. Las condiciones de borde corresponden a los desplazamientos restringidos en ambas direcciones sobre los extremos superior e inferior de la columna.

El primero de los resultados del problema es el desplazamiento de cada uno de los nudos de la malla mostrado en la Figura 4(b). A partir del vector de desplazamientos nodales se calcularon las componentes de deformación en el interior de cada elemento con la Ecuación (11). Asimismo, las componentes del esfuerzo se obtienen del producto entre la matriz

constitutiva elástica y el vector de las deformaciones indicado en la Ecuación (10). La Figura 4(c) muestra

la distribución de las componentes de esfuerzo normal en dirección  $y$ .

Figura 4. Ménsula de concreto sometida a una carga distribuida: (a) geometría, cargas y condiciones de borde del dominio modelado, (b) geometría deformada, y (c) esfuerzo normal en dirección  $y$



#### 4. Discusión

La Figura 2(b) muestra la componente de esfuerzo cortante  $\sigma_{zx}$  en la sección transversal de una barra prismática sometida a torsión pura, la cual adquiere un valor máximo positivo y negativo de  $1750 \text{ kN/m}^2$  en las caras superior e inferior de las aletas. Sustituyendo el ángulo de torsión por unidad de longitud calculado de  $6.8827 \times 10^{-4} \text{ rad/m}$  en la Ecuación (18) se obtiene la constante torsional de la sección  $J=0.0203 \text{ m}^4$ .

En el problema de infiltración del agua, las líneas de igual cabeza piezométrica de la Figura 3(b), se distribuyen entre 8.0m y 1.0m sobre el suelo conservando su ortogonalidad con respecto a las fronteras impermeables del medio.

En el problema mecánico elástico lineal estático, el esfuerzo normal en la dirección de aplicación de la carga se concentra en tres puntos de la ménsula como lo ilustra la Figura 4(c). Se observa un esfuerzo máximo de tensión de  $1150 \text{ kN/m}^2$  en la cara superior y un esfuerzo de compresión importante de  $-1100 \text{ kN/m}^2$ , asociados a la flexión. A diferencia de la solución analítica de vigas, el MEF también permite identificar el esfuerzo normal máximo a compresión de  $-1850$

$\text{kN/m}^2$  ubicado debajo de la carga. La geometría deformada mostrada en la Figura 4(b) muestra el desplazamiento vertical del voladizo y el giro de la unión entre columna y ménsula.

El diseño del programa permite la construcción de nuevas subrutinas que conlleven a la solución de problemas diferentes a los contemplados en la primera versión. De hecho, varias tesis y trabajos de final de curso han ampliado y modificando la versión preliminar de *PEFICA* para lograr objetivos particulares. En el trabajo de Herrera (2007) se implementó un procedimiento de cálculo de los esfuerzos cortantes en barras prismáticas de concreto reforzado sometido a torsión pura mediante el método semi-inverso de Saint-Venant (Linero & Garzón, 2010). Cardona (2008) realizó la simulación numérica del proceso de transferencia de calor en cables sometidos a corriente eléctrica. Puerto (2008) desarrollo un proceso de automatización de la generación de la malla de elementos finitos y de cálculo de las componentes de esfuerzo en túneles. Corredor (2009) obtuvo la distribución de esfuerzos en láminas con orificios sometidas a tensión mediante el método de los elementos finitos y comparó con resultados analíticos y experimentales. Caicedo

(2010) y Lamus et al., (2011), desarrollaron un procedimiento estocástico que describe el carácter aleatorio de la dirección de las fibras de refuerzo adicionadas al concreto en el rango elástico y en condición plana de esfuerzos. Finalmente, Herrera (2011) y Rodríguez (2011) construyeron un código que permite analizar armaduras planas, cuyo material obedece a un modelo constitutivo unidimensional de plasticidad y de daño (De Souza et al., 2008).

## 5. Conclusiones

El método de los elementos finitos requiere la capacidad de cálculo de un computador para analizar problemas aplicados. En el proceso de aprendizaje asistido por tal herramienta, se corre el riesgo de preparar al estudiante como simple usuario de programas tipo caja negra, dejando de lado la conceptualización de la metodología implementada en dichos programas. Por tal razón, los programas de elementos finitos a código abierto como *PEFiCA*, ofrecen al usuario un grupo de operaciones básicas, para que a partir de ellas él mismo elabore el procedimiento principal de cálculo, estimulando su trabajo autónomo y el aprendizaje de la metodología.

*PEFiCA* ha sido utilizado en el aula de clase durante más de dos años, en las asignaturas elementos finitos para ingenieros civiles y análisis estructural por elementos finitos de los programas curriculares de Ingeniería Civil y de Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia. La percepción de los profesores indica que el programa facilita la integración entre la exposición de los

conceptos básicos del método de los elementos finitos, con la aplicación del mismo a problemas prácticos sin importar su tamaño. Además se concluyó que los estudiantes que utilizaron *PEFiCA* conocieron el interior del método de los elementos finitos, más allá del simple entrenamiento de introducir datos y observar resultados.

El programa *PEFiCA* constituye un paso importante en el desarrollo de programas propios de elementos finitos, lo cual muestra la apropiación del conocimiento en el tema y la capacidad de implementación de nuevos modelos numéricos en nuestro medio. Esto se observa en más de 7 tesis de grado terminadas que utilizaron el programa como herramienta.

El programa permite resolver la ecuación diferencial de campo bidimensional de *Poisson* que tiene aplicación a problemas de flujo irrotacional, infiltración del agua en suelos permeables, transferencia de calor y distribución de esfuerzos cortantes en barras sometidas a torsión. Asimismo, con el programa se puede calcular el campo del esfuerzo y la deformación en un problema mecánico elástico lineal estático en condición plana de esfuerzos y de deformaciones, lo cual es de gran aplicación en las áreas de ingeniería estructural, ingeniería mecánica y geotecnia.

Los programas Microsoft Office® Excel® y Visual Basic for Application® constituyen la plataforma de *PEFiCA*. La popularidad de la hoja de cálculo, la sencillez del lenguaje de programación y por otro lado la distribución gratuita del programa, permiten que *PEFiCA* esté al alcance de todos, sin requerir licencias de otras aplicaciones.

## Referencias

---

- Caicedo, M. A. (2010). *Modelación numérica con elementos finitos del concreto reforzado con fibras cortas mediante un modelo constitutivo de daño - plasticidad*. Tesis de Maestría en Ingeniería- Estructuras. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Cardona, L. F. (2008). *Simulación numérica del proceso de transferencia de calor en cables sometidos a corriente eléctrica*. Tesis de pregrado en Ingeniería Civil. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Corredor, C. (2009). *Simulación numérica y comparación analítica y experimental de la distribución de*

*esfuerzos en láminas con orificios sometidas a tensión*. Tesis de pregrado en Ingeniería Civil. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

- De Souza, E. A., Peric, D., & Owen, D. (2008). *Computational methods for plasticity*. John Wiley and Sons.

- Herrera, L. A. (2007). *Simulación del comportamiento elástico del concreto reforzado sometido a torsión pura mediante el método semi-inverso de Saint-Venant y el método de los elementos finitos*. Tesis de pregrado en Ingeniería Civil. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia.

- Herrera, L. A. (2011). *Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de daño*. Tesis de Maestría en Ingeniería- Estructuras. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Hughes, T. J. R. (2000). *The finite element method*. New York: Dover.
- Lamus, F., Caicedo, M. A., & Linero, D. (2011). Simulación numérica del comportamiento elástico del concreto reforzado con fibras cortas de acero en condición plana de esfuerzos. *Revista Ingeniería e Investigación*, 31(1), 26 - 38.
- Linero, D. (1999). *Euler. Programa didáctico de elementos finitos*. Bogotá: Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. (2009). PEFiCA - Programa de elementos finitos a código abierto (Version versión 1.0). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Linero, D. L., & Garzón, D. A. (2010). *Elementos de la mecánica del medio continuo para cuerpos sólidos. Volumen 1: Temas Básicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Puerto, S. (2008). *Automatización del proceso de generación de mallas en el método de los elementos finitos para el cálculo de esfuerzos en túneles y su validación mediante el método de las capas múltiples*. Tesis de pregrado en Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Reddy, J. N. (2005). *An introduction to the finite element method* (third edition ed.): McGraw-Hill.
- Reddy, J. N. (2008). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Rodríguez, L. E. (2011). *Modelación numérica del concreto simple con elementos finitos usando un modelo constitutivo de plasticidad*. Tesis de Maestría en Ingeniería - Estructuras, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Taylor, R. (2008). *FEAP - A Finite Element Analysis Program (Version 8.2)*. Berkeley: Department of Civil and Environmental Engineering - University of California.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., & Zhu, J. (2005). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (6th ed. Vol. 1): Butterworth-Heinemann.

## Sobre los autores

---

### Dorian Luis Linero Segrera

Ingeniero Civil y Magister en Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, y Doctor en Análisis Estructural de la Universidad Politécnica de Cataluña (España), y Profesor Asociado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (Colombia).  
dllineros@unal.edu.co.

### Diego Alexander Garzón Alvarado

Ingeniero Mecánico de la Universidad Nacional de Colombia, Magister en Materiales de la Universidad de los Andes, Doctor en Mecánica Computacional de la Universidad de Zaragoza (España), y Profesor Titular de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (Colombia).  
dagarzona@unal.edu.co.

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.