

PROGRAMA DIDÁCTICO DE CÓDIGO ABIERTO DE ANÁLISIS DINÁMICO DE ESTRUCTURAS UNDIN 1.0

OPEN-SOURCE DIDACTIC SOFTWARE FOR DYNAMIC ANALYSIS OF STRUCTURES UNDIN 1.0

Francisco Leonardo Noy Hilarión y Dorian Luis Linero Segrera
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá (Colombia)

Resumen

Este trabajo describe la primera versión del Programa Didáctico de Código Abierto de Análisis Dinámico de Estructuras UNDIN 1.0, cuya principal finalidad es apoyar y motivar el aprendizaje y la investigación en el campo del análisis dinámico elástico e inelástico de estructuras. Calcula modos y frecuencias de vibración, desplazamientos, reacciones y acciones internas de pórticos planos y espaciales, bajo la acción de aceleraciones en los apoyos, considerando amortiguamiento, no linealidad del material y deformaciones infinitesimales. UNDIN 1.0 fue desarrollado con la misma filosofía del programa a código abierto PEFiCA, que permite ver, modificar y ampliar las subrutinas del proceso de cálculo. En este trabajo se presentan la estructura del programa, las metodologías de cálculo implementadas, el alcance y las limitaciones. Al final se muestran y comparan los resultados del análisis dinámico de diferentes pórticos obtenidos con UNDIN 1.0 y con programas comerciales.

Palabras claves: dinámica estructural; análisis estructural; análisis dinámico elástico e inelástico; programas de computador de código abierto

Abstract

This work describes the first version of Open-Source Software of Dynamics Analysis of Structures UNDIN 1.0, which main aim is: to support and motivate the learning and research in the elastic and inelastic dynamic analysis field of structures. The software computes vibration modes and frequencies, displacements, reactions and internal forces of two-dimensional and tri-dimensional frames, sustaining accelerations at the supports, considering damping, material nonlinearly and infinitesimal strain. UNDIN 1.0 was developed with the same philosophy of the open-source software PEFiCA, which allows to observe, modify and expand the subroutine of computer procedure. This work shows the program structure, the

implemented approaches, the scope and the limitations. Finally, the some results of the dynamic analysis of different frames obtained with UNDIN 1.0 and with commercial software are compared.

Keywords: Structural dynamics; structural analysis; elastic and inelastic dynamic analysis; open-source software

Introducción

El análisis dinámico permite estimar la respuesta de una estructura sometida a un conjunto de acciones externas variables en el tiempo (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998; Wilson, 2002). Tal respuesta puede corresponder a cantidades como desplazamientos, velocidades o aceleraciones de nudos o de puntos especiales de una estructura, como también a las acciones internas inducidas en los elementos estructurales (Chopra, 2001). Las acciones externas pueden ser causadas por maquinaria, explosión, viento o sismo (García, 1998).

Un gran porcentaje de la población colombiana vive en zonas de amenaza sísmica intermedia y alta (AIS, 2010). En consecuencia, la aceleración en la base de una estructura, producida por un movimiento sísmico, es una acción externa determinante en su diseño.

El efecto de un sismo de diseño sobre una estructura es tal que en muchos sitios se esperan deformaciones importantes, lo que induce inelasticidad en los materiales componentes. La evaluación de la respuesta de una estructura que se deforma hasta alcanzar el comportamiento inelástico del material durante un movimiento sísmico fuerte es un problema de importancia en ingeniería sísmica (Chopra, 2001).

Por otro lado, el uso de programas de código abierto en los que el proceso de cálculo es visible y modificable puede complementar el aprendizaje adquirido en los cursos de análisis dinámico elástico e inelástico de estructuras y profundizar en el estudio de problemas más avanzados relacionados con el tema.

Como precedentes, en las asignaturas Análisis Matricial Avanzado y Análisis Estructural por Elementos Finitos, impartidas en el programa de Maestría en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, se ha utilizado el Programa de Elementos Finitos de Código Abierto PEFiCA (Linero, 2008; Linero & Garzón, 2012), con el

cual los estudiantes aplican los conceptos adquiridos en clase y desarrollan ejercicios, lo que estimula su aprendizaje en cada curso.

Aunque PEFiCA es un programa orientado a la solución de estructuras por el método de elementos finitos, su uso ha permitido que en el curso de Análisis Matricial Avanzado se implementen análisis estáticos lineales de estructuras, considerando el efecto de las deformaciones por corte, de las conexiones parcialmente rígidas o de las discontinuidades en la rigidez de los elementos, características especiales que se incluyen en programas comerciales.

Metodología del análisis dinámico de pórticos

Representación de la estructura

El programa desarrollado permite analizar estructuras tipo pórtico plano o espacial, conformadas por barras prismáticas con secciones de doble simetría, vinculadas mediante conexiones parcialmente rígidas en los extremos. El material puede exhibir un comportamiento elástico o inelástico, considerando deformaciones infinitesimales.

Se supone que cada placa de entrepiso o cubierta del edificio tiene comportamiento de diafragma rígido (Chopra, 2001; García, 1998; Linero, 2012; Wilson, 2002). Esta suposición permite representar la traslación y rotación en el plano de cada placa mediante tres grados de libertad. Así mismo, se establece que la masa de la estructura se concentra en cada una de las placas, despreciando la masa de las columnas.

Estas simplificaciones hacen que este tipo de estructuras puedan entenderse como un conjunto de cuerpos rígidos denominados diafragmas, vinculados entre sí por elementos flexibles. Para el análisis, las masas y los momentos de inercia de masa de los diafragmas se concentran en los respectivos

centros de masa. Finalmente, los elementos flexibles conforman la estructura principal, y resisten las acciones internas impuestas por el movimiento de los diafragmas.

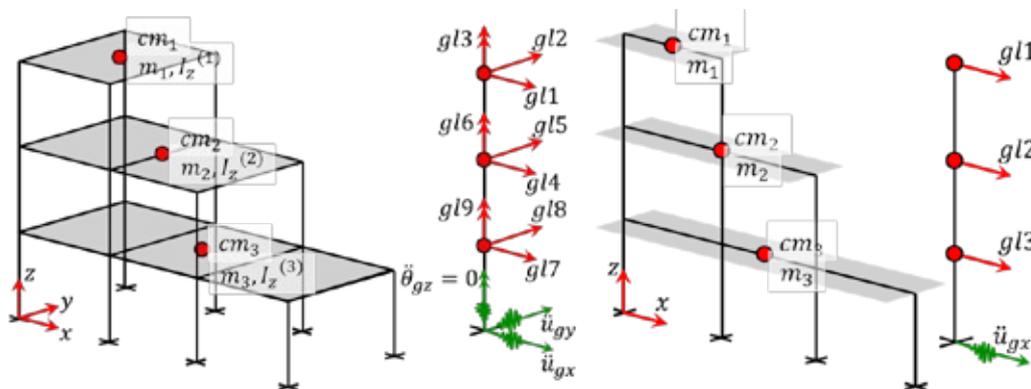
En cuanto a los grados de libertad dinámicos, que coinciden con los posibles desplazamientos independientes necesarios para definir la posición de las masas de la estructura respecto de la posición de equilibrio (Chopra, 2001; García, 1998), la presencia de diafragmas rígidos reduce su cantidad, y por ende el número de ecuaciones de movimiento por resolver a tres por diafragma para estructuras espaciales y a una por diafragma en estructuras planas. Por lo tanto para el caso espacial, los grados de libertad dinámicos coinciden con los desplazamientos $(u_\phi)_x^{(i)}$, $(u_\phi)_y^{(i)}$ y con la rotación $(\theta_\phi)_z^{(i)}$ relativa a la base del centro de masa de cada diafragma, mientras que para el caso

plano el único grado de libertad del diafragma es el desplazamiento $(u_\phi)_x^{(i)}$.

Los registros acelerográficos indican la aceleración asociada a la traslación en tres direcciones ortogonales. En consecuencia, las componentes de la aceleración \ddot{u}_{gx} y \ddot{u}_{gy} en las direcciones x e y se aplican en cada placa de un pórtico espacial, despreciando la aceleración $\ddot{\theta}_{gz}$ asociada a la rotación alrededor de un eje z . En particular, para pórticos planos sólo se considera la componente de la aceleración asociada a la traslación \ddot{u}_{gx} .

La figura 1 esquematiza los planteamientos relacionados con la presencia de diafragmas rígidos, la concentración de la masa, la selección de los grados de libertad y la selección de las componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de la estructura.

Figura 1. Idealización, grados de libertad y componentes de aceleración de la base consideradas en el análisis dinámico de a) un pórtico espacial y b) un pórtico plano.



Planteamiento de las ecuaciones de movimiento de los diafragmas

Por la acción de la aceleración en la base $\{\ddot{u}_g\}$, sobre los diafragmas actúa en cada instante de tiempo un conjunto de acciones producidas por la deformación de la estructura, denominadas acciones equivalentes, puesto que estáticamente equivalen a las fuerzas internas en los elementos (Spinel, 1993). También actúa un conjunto de acciones de amortiguamiento producidas por el contacto de la estructura con el medio que la rodea, y que se encargan de disipar la energía introducida por la aceleración de la base mientras la estructura se mantiene en rango elástico

(Chopra, 2001). Todas estas acciones actúan en dirección contraria al movimiento de los diafragmas, en las mismas direcciones de los grados de libertad dinámicos, e inducen un movimiento acelerado en los diafragmas.

La aceleración de la base impone desplazamientos en los diafragmas que deforman la estructura. Cada elemento reacciona oponiéndose a su deformación mediante un conjunto de acciones en los extremos que, de acuerdo con la tercera ley de Newton, se transmiten a los nudos de los diafragmas con la misma magnitud pero en sentido contrario. Por tratarse de cuerpos rígidos, estas acciones pueden trasladarse a los

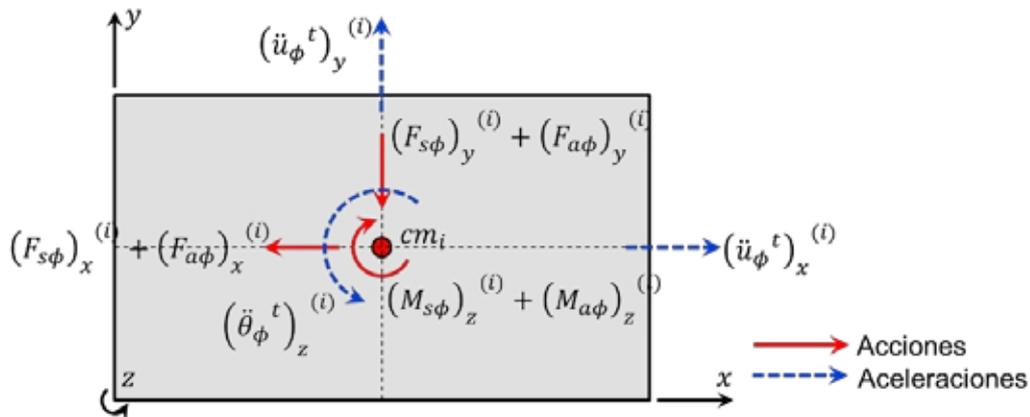
centros de masa mediante estática. Para el diafragma i las acciones resultantes $(F_{s\phi})_x^{(i)}$, $(F_{s\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{s\phi})_z^{(i)}$ son función de los desplazamientos relativos a la base del centro de masa $(u_\phi)_x^{(i)}$, $(u_\phi)_y^{(i)}$ y $(u_\phi)_z^{(i)}$.

En cuanto al amortiguamiento natural, por simplicidad se asume un amortiguamiento de tipo viscoso equivalente. Las acciones de amortiguamiento que actúan en el diafragma, denominadas $(F_{a\phi})_x^{(i)}$, $(F_{a\phi})_y^{(i)}$ y $(M_{a\phi})_z^{(i)}$ son función de las velocidades relativas a la base del centro de masa $(\dot{u}_\phi)_x^{(i)}$, $(\dot{u}_\phi)_y^{(i)}$ y $(\dot{u}_\phi)_z^{(i)}$. Este enfoque es simplificado puesto que los mecanismos por los cuales se disipa la energía en una estructura son complejos y

su representación matemática no es práctica en una estructura real (Chopra, 2001).

En la figura 2 se muestran las acciones equivalentes a los esfuerzos internos y las acciones de amortiguamiento a las que está sometido cada diafragma rígido de una estructura espacial en cada instante de tiempo, así como las aceleraciones traslacionales y angular absolutas que experimentaría el diafragma por las acciones aplicadas. En este caso $(\ddot{u}_\phi^t)_x^{(i)}$ y $(\ddot{u}_\phi^t)_y^{(i)}$, y son las aceleraciones traslacionales absolutas del centro de masa del diafragma i en las direcciones x e y , mientras que $(\ddot{\theta}_\phi^t)_z^{(i)}$ es la aceleración angular absoluta en dirección del mismo diafragma.

Figura 2. Acciones equivalentes y de amortiguamiento trasladadas al centro de masa de cada diafragma.



De la aplicación de las ecuaciones de movimiento de traslación en direcciones x e y de rotación alrededor de obtenidas de la dinámica de cuerpos rígidos en el plano (Hibbeler, 2010), así como de la relación entre aceleración absoluta y relativa a la base de

las masas (Clough & Penzien, 1995; Chopra, 2001; García, 1998) el sistema de ecuaciones que describe el movimiento de los diafragmas rígidos, cuando actúan acciones debidas a la deformación de la estructura y al amortiguamiento natural es de la forma:

$$[m]\{\ddot{u}_\phi\} + \{F_{a\phi}\} + \{F_{s\phi}\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\} \quad (1)$$

Donde $[m]$ es la matriz de masas, $\{\ddot{u}_\phi\}$ es el vector de aceleraciones relativas a la base de los centros de masa, $\{F_{a\phi}\}$ y $\{F_{s\phi}\}$ son los vectores de acciones de amortiguamiento y acciones equivalentes que actúan en los centros de masa, $[\gamma]$ es la matriz de influencia y $\{\ddot{u}_g\}$ es el vector de aceleración de la base. El número de ecuaciones del sistema coincide con el número de grados de libertad considerados en el análisis dinámico.

La ecuación (1) gobierna la respuesta de un sistema en rango elástico o inelástico de deformaciones y con cualquier tipo de amortiguamiento. Las incógnitas corresponden a las cantidades $\{\ddot{u}_\phi\}$, $\{F_{a\phi}\}$ y $\{F_{s\phi}\}$. Para su solución se utilizan métodos como los que se describen posteriormente.

En los grados de libertad diferentes a los grados de libertad dinámicos, no se presentan acciones

de amortiguamiento y además existe equilibrio entre las acciones equivalentes que actúan en los nudos de los diafragmas, ya que al no considerar las componentes de aceleración \ddot{U}_{gz} , $\ddot{\theta}_{gx}$ y $\ddot{\theta}_{gy}$, tampoco se imponen acciones inerciales originadas por fuerzas desbalanceadas.

Procedimientos de análisis dinámico

Análisis dinámico elástico

Los procedimientos de análisis dinámico elástico utilizados generalmente en la solución de la ecuación (1) son el análisis modal cronológico y el análisis modal espectral. El primero permite estimar la respuesta en

$$[m]\{\ddot{u}_\phi\} + [c]\{\dot{u}_\phi\} + [k_\phi]\{u_\phi\} = -[m][\gamma]\{\ddot{u}_g\} \quad (2)$$

En la ecuación anterior, $[c]$ y $[k_\phi]$ son las matrices de masa y rigidez lateral mientras que $\{\dot{u}_\phi\}$ y $\{u_\phi\}$ son los vectores de velocidades y desplazamientos relativos a la base de los centros de masa de los diafragmas rígidos. El sistema de ecuaciones se encuentra acoplado por las matrices $[c]$ y $[k_\phi]$, las cuales por lo general son simétricas pero no diagonales.

El análisis modal se basan en el desacople del sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de (2), aprovechando la ortogonalidad de los modos de vibración natural de la

$$[M]\{\ddot{\eta}(t)\} + [C]\{\dot{\eta}(t)\} + [K]\{\eta(t)\} = [\alpha]\{\ddot{u}_g(t)\} \quad (3)$$

En el método de análisis modal cronológico la solución del anterior sistema de ecuaciones corresponde a los desplazamientos, velocidades y aceleraciones generalizadas $\{\eta(t)\}$, $\{\dot{\eta}(t)\}$ y $\{\ddot{\eta}(t)\}$ respectivamente. A partir de éstas se calculan los desplazamientos de los centros de masa $\{u_\phi(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\}$, las acciones equivalentes a los esfuerzos internos que actúan en los centros de masa $\{F_{s\phi}(t)\} = [k_\phi]\{u_\phi(t)\}$ y todas las demás cantidades que representan la respuesta de la estructura tales como desplazamientos de nudos, derivadas, cortantes de piso, acciones en los extremos o acciones internas en los elementos. Con la respuesta obtenida es

cada instante de tiempo de una estructura sometida a una o varias componentes de aceleración en la base, mientras que el segundo permite estimar la respuesta máxima probable de la estructura a partir de un espectro elástico, por lo general a partir del espectro de pseudo aceleraciones, el cual resume la respuesta máxima de todos los posibles sistemas de un grado de libertad sometidos a una sola componente de aceleración en la base.

Estos procedimientos son aplicables siempre y cuando exista linealidad entre acciones y desplazamiento y se considere amortiguamiento clásico, de forma que en la ecuación (1) se puedan hacer las sustituciones y $\{F_{a\phi}\} = [c]\{\dot{u}_\phi\}$ y $\{F_{s\phi}\} = [k_\phi]\{u_\phi\}$, así:

estructura $[\phi]$. Tales modos describen formas particulares de respuesta en vibración libre y se obtienen de la solución del problema de valores propios $[k_\phi][\phi] = [m][\phi][\Omega^2]$. Existe un número de modos igual al número de grados de libertad dinámicos de la estructura.

Las matrices $[m]$, $[c]$ y $[k_\phi]$ se convierten en las matrices diagonales $[M]$, $[C]$ y $[K]$, después de pre y pos multiplicar por la matriz $[\phi]$. La ecuación (2) toma la siguiente forma, donde $[\alpha]$ es la matriz de coeficientes de participación:

posible verificar las ecuaciones de movimiento y de balance de energía.

En el análisis modal espectral se obtiene el desplazamiento generalizado máximo (η_{ij}) asociado a cada modo de vibración i , cuando actúa solamente la componente j de aceleración en la base $\{\ddot{u}_{gj}\}$. A partir de $(\eta_{ij})_o$ se obtiene el aporte máximo de cada modo de vibración i , a los desplazamientos de los centros de masa $\{(u_{\phi i})_o^j\} = \{\phi_i\}(\eta_{ij})_o$ y el aporte máximo a las acciones equivalentes $\{(F_{s\phi i})_o^j\} = [k_\phi]\{(u_{\phi i})_o^j\}$. De los resultados anteriores y por la acción exclusiva de

$\{\ddot{u}_{gj}\}$, se obtienen cantidades como las derivadas, los cortantes de piso o las acciones internas.

Dado que los aportes máximos por modo a la respuesta no suceden en el mismo instante de tiempo ni tienen el mismo signo, las respuestas por modo y por componente de aceleración en la base se deben combinar utilizando métodos de combinación modal. Como resultado se obtiene la respuesta máxima probable de la estructura r_o^j , producida por cada $\{\ddot{u}_{gj}\}$ actuando individualmente. Posteriormente, las respuestas r_o^j se combinan utilizando métodos de combinación direccional para tener en cuenta los efectos ortogonales, puesto que el 100 % de los movimientos sísmicos en cada dirección no se presentan en el mismo instante de tiempo, por lo que la máxima respuesta estructural producida por cada componente tampoco se da de forma simultánea.

$$[m]\{\Delta\ddot{u}_\phi\} + [c_{(t)}]\{\Delta\dot{u}_\phi\} + [k_{\phi(t)}]\{\Delta u_\phi\} = -[m][\gamma]\{\Delta\ddot{u}_g\} \quad (4)$$

En la anterior expresión $[k_{\phi(t)}]$ corresponde a la matriz de rigidez tangente, evaluada en función de la rigidez de los elementos y de sus conexiones en el instante t , mientras que $[c_{(t)}]$ es por lo general la matriz de amortiguamiento de Rayleigh, obtenida por combinación de las matrices de masa y de rigidez inicial (en $t=0$) o tangente.

El estado de esfuerzos y deformaciones que inducen las cargas iniciales que actúan de forma simultánea con la aceleración de la base en la estructura, debe tenerse en cuenta en el análisis dinámico inelástico puesto que representan las condiciones de la estructura antes de aplicar los movimientos sísmicos. En forma simplificada el efecto de las cargas iniciales puede obtenerse a través de un análisis estático lineal utilizando la ecuación que relaciona acciones y desplazamientos correspondientes $\{F\}=\{F^F\} + [k]$

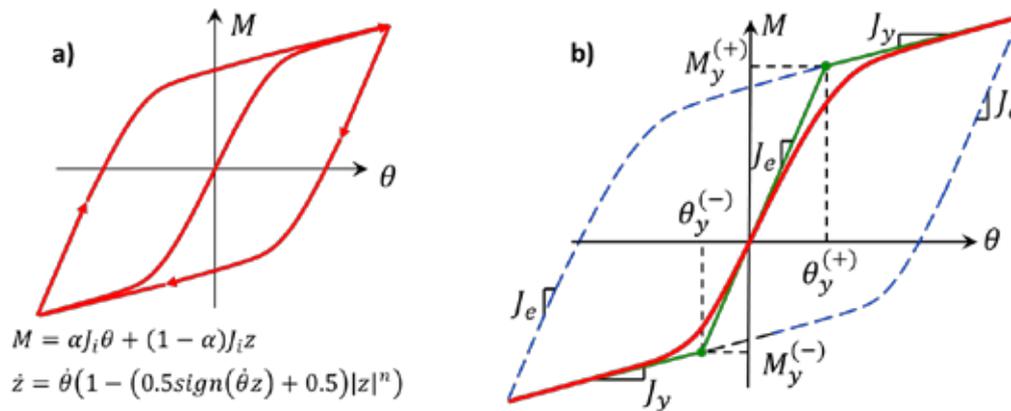
Análisis dinámico inelástico

El análisis dinámico inelástico permite estimar la respuesta de una estructura sometida a un movimiento acelerado en la base, cuando no hay linealidad entre las acciones equivalentes y desplazamientos.

Mediante los métodos de análisis dinámico inelástico se puede resolver el sistema de ecuaciones simultáneas (1) sin utilizar ninguna técnica de desacople como la utilizada en los procedimientos de análisis dinámico elástico. Para tal fin, la misma ecuación se plantea en forma incremental en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$, aproximando los incrementos en las acciones de amortiguamiento y equivalentes $\{\Delta F_{a\phi}\}$ y $\{\Delta F_{s\phi}\}$, como $[c_{(t)}]\{\Delta\dot{u}_\phi\}$ y $[k_{\phi(t)}]\{\Delta u_\phi\}$ respectivamente. Reemplazando las expresiones anteriores en la ecuación (1) se tiene que:

$\{u\}$. Este criterio es aplicable siempre que las cargas iniciales conserven el comportamiento elástico de las conexiones.

La pérdida de linealidad del material se representa mediante el concepto de rótula plástica. En el programa, las rótulas se producen por flexión y se concentran en los extremos de los elementos. Tales rótulas corresponden a resortes rotacionales no lineales, cuya relación momento – rotación se basa en el modelo de Bouc – Wen (figura 3) utilizado para representar otros tipos de elementos no lineales como aisladores sísmicos y amortiguadores viscoelásticos (Quiroga, 2008). Para tal fin, en la formulación del elemento tipo pórtico espacial se consideran conexiones parcialmente rígidas en los extremos, de forma que la rigidez de las conexiones pueda ser variable.

Figura 3. Relación $M-\theta$ de un resorte rotacional basada en el modelo de Bouc – Wen.

La solución de la ecuación (4) puede obtenerse con la familia de métodos de Newmark, combinada con el método de Newton – Raphson modificado en un enfoque iterativo. Este último método se usa para reducir los errores acumulativos que se inducen en la respuesta, al aproximar el incremento en las acciones equivalentes en función de la rigidez tangente y del incremento de desplazamientos en el intervalo ($\{\Delta u_{s\phi}\} = [k_{\phi(t)}] \{\Delta u_{\phi}\}$), dado que la respuesta no lineal de la estructura es altamente dependiente de la historia de cálculo (Bathe, 1996).

De la solución de la ecuación (4) se obtienen los incrementos en los desplazamientos, velocidades y aceleraciones relativas a la base de los centros de masa, los incrementos en los desplazamientos de los nudos, los incrementos en las acciones equivalentes y de amortiguamiento, y los incrementos de las acciones en los extremos de los elementos en cada intervalo de tiempo. Finalmente, se obtienen cantidades como derivadas, cortantes de piso y las acciones internas en los elementos en cada instante de tiempo.

Con la respuesta calculada se pueden verificar las ecuaciones de movimiento y de balance de energía, incluyendo en esta última la energía de deformación inelástica o energía disipada por histéresis en las rótulas plásticas.

Implementación de UNDIN 1.0

Estructura del programa

El programa desarrollado consiste en una macro de Microsoft Excel basado en PEFICA©, compuesto por

una subrutina principal denominada **UNDIN** escrita en el módulo **Md**, y unas subrutinas secundarias que realizan tareas específicas. La subrutina principal funciona a partir de las subrutinas secundarias que se agrupan por módulos de acuerdo con su uso (Lineró, 2008).

Para la construcción de la subrutina principal y de las subrutinas secundarias se ha utilizado un buen número de subrutinas existentes en la versión de PEFICA tomada como base. De igual forma se han adicionado subrutinas nuevas a los módulos **MdMT**, **MdNGL**, **MdTR**, **MdIO** y **MdPB** que permiten realizar tareas como manipular datos de matrices, numerar grados de libertad, importar o exportar matrices. También se han complementado algunas subrutinas originales almacenadas en los módulos **MdK**, **MdF** y **MdVP**, que permiten crear matrices elementales de rigidez, vectores elementales de fuerzas y resolver el problema de valores propios para obtener las frecuencias y a los modos de vibración natural de la estructura.

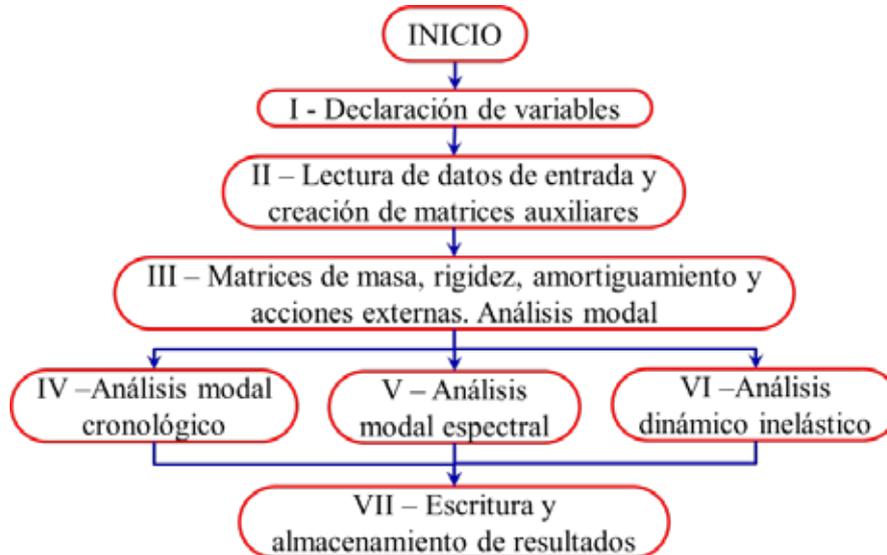
Adicionalmente, se han creado los módulos **MdAD** y **MdAE** que contienen subrutinas para realizar cálculos específicos de análisis dinámico y de análisis estructural respectivamente, desarrolladas tomando como base la formulación matemática de los diferentes procedimientos de análisis dinámico y de análisis matricial, y con las que se realizan tareas específicas como crear matrices de masa, de amortiguamiento o de rigidez, realizar los procesos de condensación y asociación de grados de libertad, calcular acciones internas, etc.

La subrutina principal UNDIN se encuentra dividida en siete etapas de cálculo, en las que se agrupan las

instrucciones que permiten realizar tareas comunes tales como la lectura de datos, la ejecución de alguno de los tipos de análisis dinámico o la escritura y el

almacenamiento de resultados. La estructura general de UNDIN 1.0 se muestra el diagrama de flujo de la figura 4.

Figura 4. Estructura general del programa.



La parte I comprende la definición de las variables escalares y matriciales necesarias para la ejecución de la subrutina principal. En la parte II se realiza la lectura de los datos de entrada, de tipo escalar o matricial. Éstos se leen desde las once hojas de datos dispuestas para tal fin y se definen algunos parámetros escalares relacionados con el número de grados de libertad, y se crean unas tablas de datos auxiliares que facilitan el funcionamiento de otras subrutinas.

En la parte III se crean las matrices constantes de masa $[m]$, rigidez lateral $[k_\phi]$ y amortiguamiento $[m]$, así como el vector de acciones externas equivalentes a la aceleración de la base $\{F_{ext}(t)\}$ para cada instante de tiempo. Se realiza el análisis modal de la estructura, del que se obtienen las frecuencias y los modos de vibración natural $[\Phi]$, calculados por el método de Jacobi generalizado. Estas cantidades son necesarias para calcular la respuesta de la estructura por alguno de los métodos de análisis dinámico elástico, así como para definir la matriz de amortiguamiento de Rayleigh, utilizada en el método de análisis dinámico inelástico. También se calculan otras cantidades útiles

para entender el comportamiento y anticiparse a la respuesta de una estructura en el rango elástico, tales como los factores de participación $[\alpha]$ y la masa modal efectiva $[\bar{m}]$.

En la parte IV se utiliza el método de análisis modal cronológico para calcular la respuesta de un pórtico plano o espacial en rango elástico y con amortiguamiento clásico, sometido a una o varias componentes de aceleración en la base. También se obtienen varios parámetros de respuesta tales como desplazamientos de centros de masa, derivas o acciones internas en los elementos. Se verifican las ecuaciones de movimiento y de balance de energía. UNDIN 1.0 calcula la variación de cada parámetro en un intervalo de tiempo.

En la parte V se calcula la respuesta máxima probable de una estructura en rango elástico y con amortiguamiento clásico a partir de un espectro elástico de pseudo aceleraciones mediante el método de análisis modal espectral. También se obtienen los valores máximos probables de los mismos parámetros de respuesta calculados por análisis modal cronológico.

En la parte VI se calcula la respuesta de una estructura en rango inelástico, con amortiguamiento de Rayleigh y sometida a una o varias componentes de aceleración en la base utilizando un método de análisis dinámico inelástico, en el que las ecuaciones de movimiento se resuelven en su forma básica utilizando el método de Newmark combinado con el método de Newton – Raphson modificado. Únicamente se considera la no linealidad material representada mediante la formación de rótulas plásticas a flexión en los extremos de los elementos. Las rótulas plásticas se idealizan mediante resortes rotacionales de rigidez variable, cuya relación entre el momento y la curvatura $M-\theta$ está definida por el modelo de Bouc – Wen. En esta etapa se calculan los mismos parámetros de respuesta estructural que se obtienen por análisis modal cronológico, se verifican las ecuaciones de movimiento y de balance de energía, incluyendo en la última la energía disipada por histéresis.

Finalmente, en la parte VII se realiza la escritura de los resultados del análisis y se exportan a archivos de texto las matrices de datos y de resultados, haciendo visible la totalidad de las variables involucradas en la solución del problema.

Alcance del programa

- UNDIN 1.0 permite representar el comportamiento dinámico de edificaciones cuyo sistema estructural está conformado por vigas, columnas y placas de entrepiso. El programa calcula modos y frecuencias de vibración, desplazamientos, reacciones y acciones internas de pórticos planos y espaciales, bajo la acción de aceleraciones en los apoyos, considerando amortiguamiento, no linealidad del material y deformaciones infinitesimales.
- El programa cuenta con elementos estructurales tipo pórtico de dos nudos, considerando tres grados de libertad por nudo para problemas bi-dimensionales o seis grados de libertad por nudo

para problemas tridimensionales. Se cuenta con un solo diafragma rígido por nivel, cuya traslación y rotación se define en su centro de masa. La acción dinámica aplicada a la estructura corresponde a las componentes horizontales de aceleración uniforme en la base.

- Los modos de vibración natural se calculan mediante el método de Jacobi generalizado. Para el cálculo de las coordenadas generalizadas en análisis modal cronológico se dispone de los métodos de aceleración lineal, excitación lineal y Newmark iterativo, mientras que para realizar la combinación modal y considerar efectos ortogonales en análisis modal espectral se dispone del método CCC, la regla 100/30 y el método RCSC.
- El comportamiento no lineal del material se representa mediante resortes rotacionales a flexión. La ecuación de movimiento puede solucionarse con la familia de métodos de Newmark en sus formas de aceleración promedio o aceleración lineal, combinadas con el método iterativo de Newton – Raphson modificado.

Resultados del programa UNDIN

UNDIN 1.0 fue validado mediante el análisis dinámico elástico de un pórtico plano y de un pórtico espacial, y mediante el análisis dinámico inelástico de un pórtico plano. La comparación de resultados se realizó con el programa SAP2000©, y resultó altamente satisfactoria.

A continuación se muestran algunos resultados del análisis dinámico del pórtico plano de concreto reforzado con tres luces y seis pisos que se ilustra en la figura 5. Se utilizó un acelerograma tomado de la base de datos de (PEER) para el análisis modal cronológico y el análisis dinámico inelástico, y un espectro de diseño basado en NSR-10 (AIS, 2010) para el análisis modal espectral.

Figura 5. Esquema descriptivo de un pórtico plano:

(a) geometría general, (b) ubicación de los resortes rotacionales, (c) secciones transversales típicas.

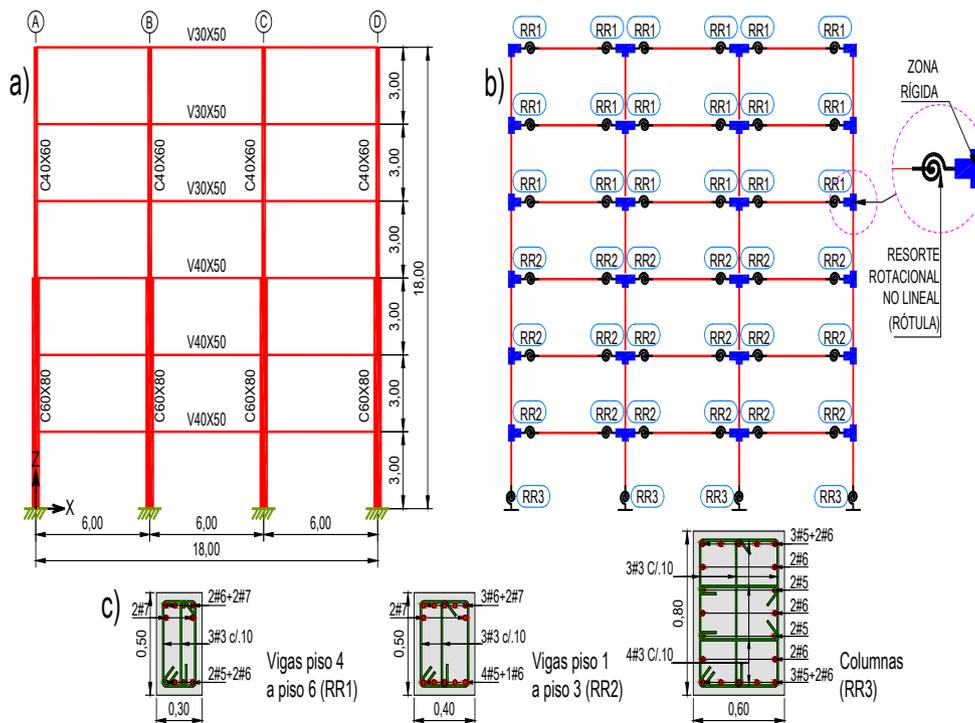
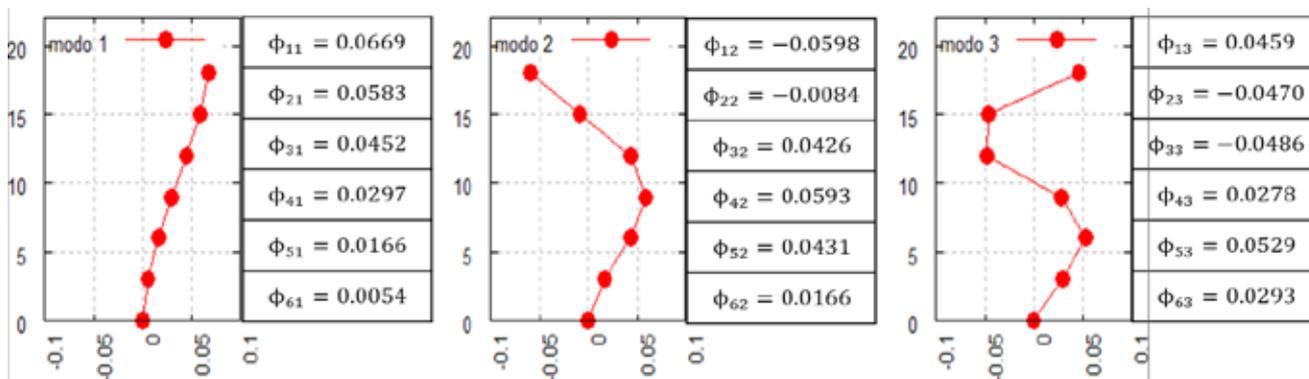


Figura 6. Primeros tres modos de vibración natural del pórtico obtenidos del análisis modal.



La figura 6 muestra los primeros tres modos de vibración natural del pórtico. Los valores numéricos mostrados coinciden con las tres primeras

columnas de la matriz utilizada en el desacople y solución de la ecuación de movimiento para el caso elástico.

Figura 7. Desplazamiento relativo a la base del centro de masa del diafragma de cubierta, obtenido por (a) análisis dinámico elástico (modal cronológico) y (b) análisis dinámico inelástico.

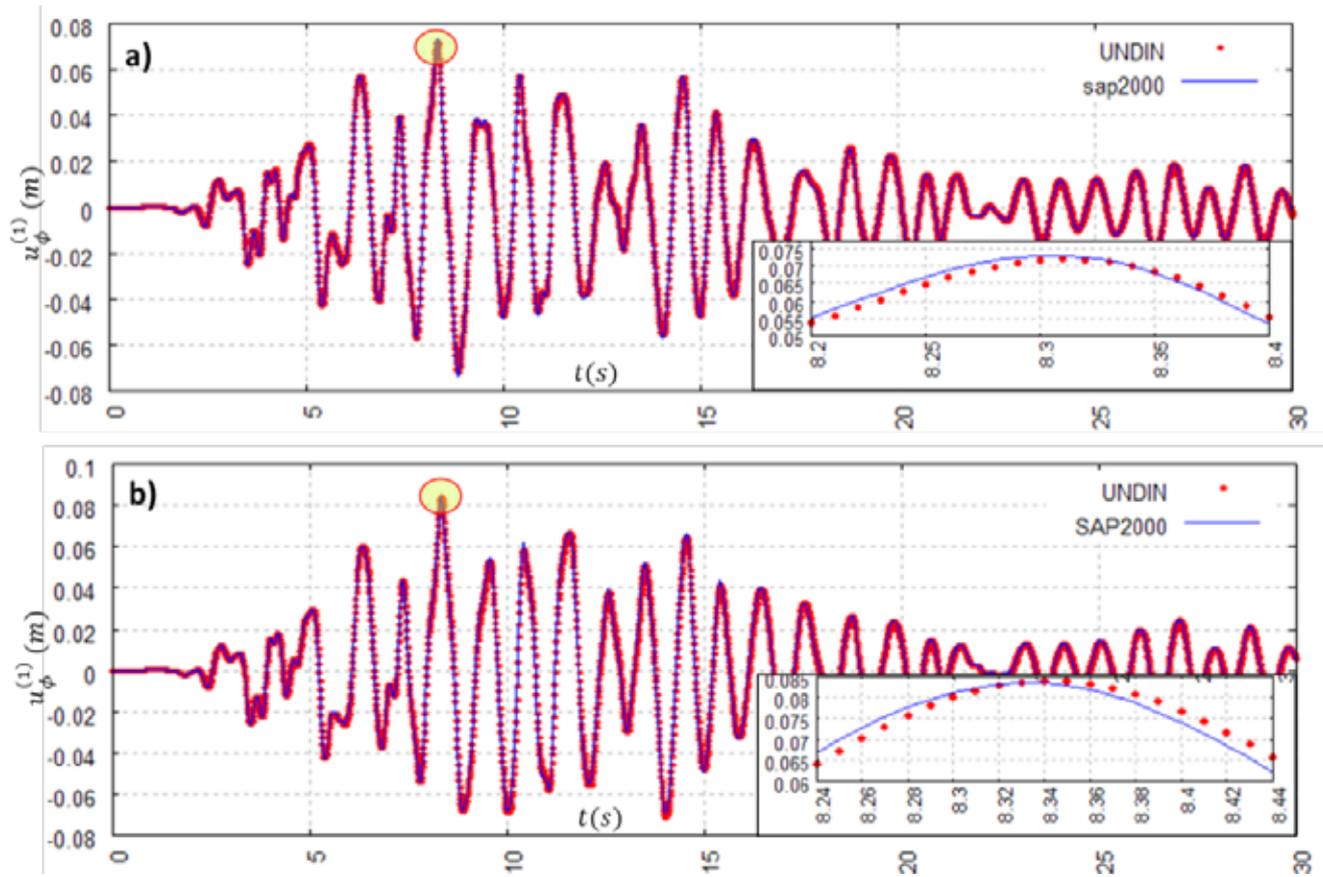


Figura 8. Comportamiento inelástico del resorte rotacional 17: (a) Relación momento - giro y (b) evolución del momento flector.

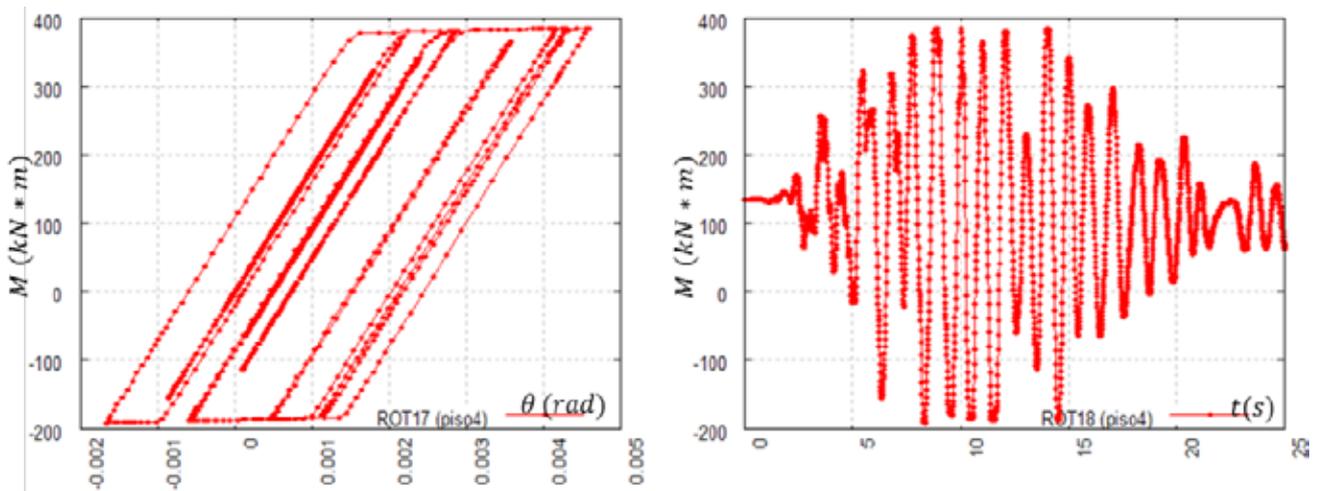
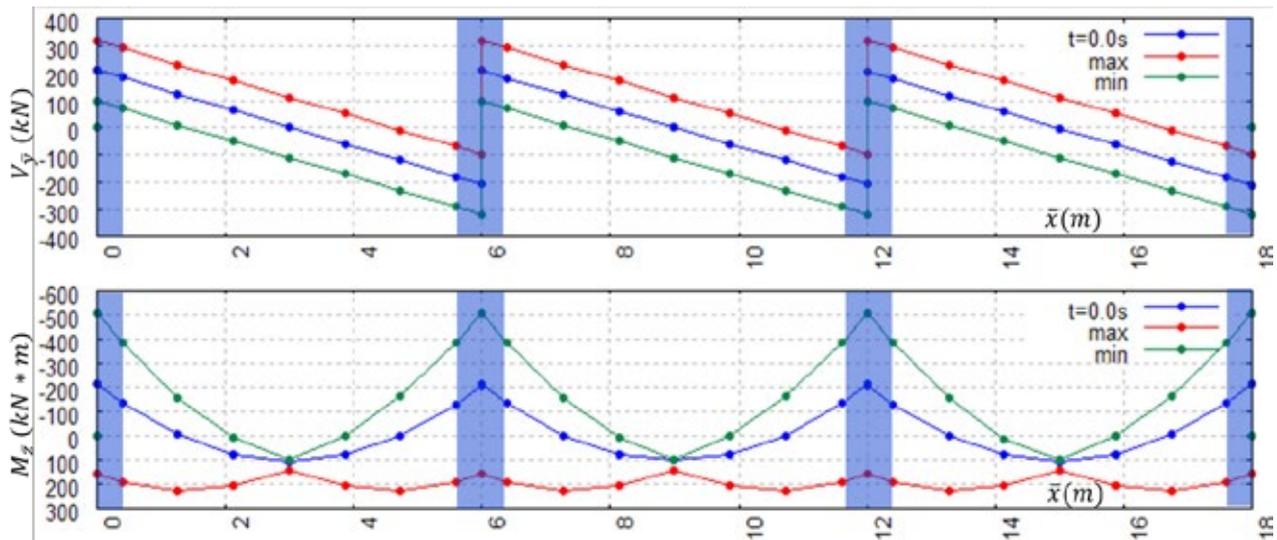


Figura 9. Diagramas de cortante y momento flector de una de las vigas del pórtico, obtenidos por análisis dinámico inelástico.

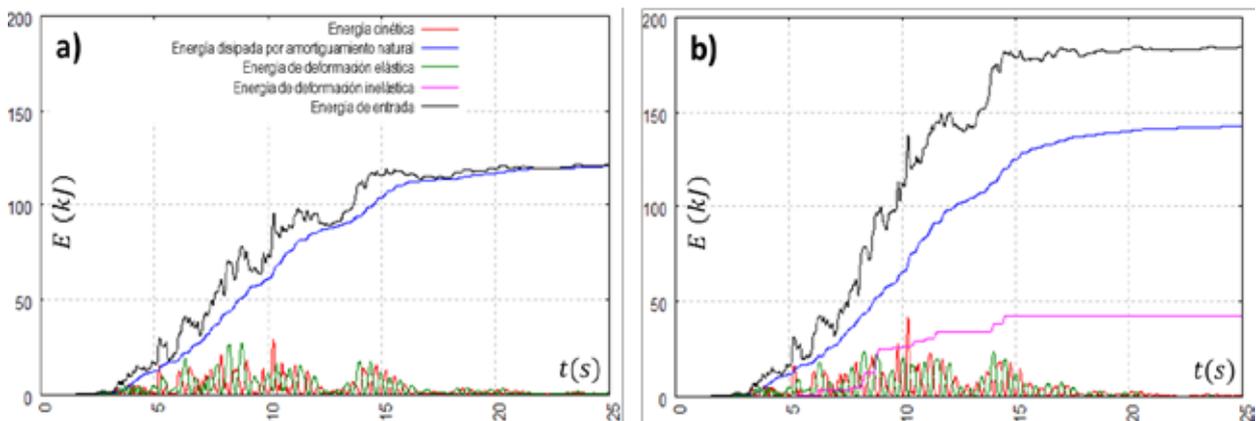


En la figura 7 se observa que los desplazamientos de los centros de masa obtenidos por análisis dinámico elástico e inelástico son similares, lo cual constituye una de las razones para usar en la práctica procedimientos de análisis elástico.

Las acciones internas obtenidas del análisis inelástico dependen de la capacidad de las rótulas formadas

por la plastificación de la sección transversal en los extremos del elemento, como lo indica la figura 9. Allí se observa que los momentos flectores máximo y mínimo en las caras de los apoyos coinciden con las capacidades del resorte rotacional no lineal correspondiente, cuya relación $M-\theta$ se muestra en la figura 8.

Figura 10. Componentes de la ecuación de balance de energía obtenidas por: (a) análisis dinámico elástico (modal cronológico) y (b) análisis dinámico inelástico.



La figura 10 muestra las componentes de energía en el análisis elástico e inelástico. Se observa que la energía de entrada del análisis inelástico es mayor que el análisis elástico. Sin embargo, tal incremento

se compensa con la energía disipada por histéresis, mientras las componentes de energía cinética, de amortiguamiento natural y de deformación elástica tienden a ser similares en los dos tipos de análisis.

Conclusiones y recomendaciones

Las principales conclusiones acerca de este trabajo son las siguientes:

- Se ha desarrollado una herramienta computacional de código abierto para apoyar el aprendizaje del análisis dinámico elástico e inelástico de estructuras, con características especiales relacionadas con la concentración de la masa, el amortiguamiento, la rigidez y las acciones externas dinámicas. Para su desarrollo se han utilizado conceptos y metodologías tomadas del análisis dinámico, del análisis matricial y del análisis no lineal de estructuras.
- Siguiendo la filosofía de PEFiCA, UNDIN 1.0 muestra de forma transparente y detallada cada uno de los procesos de cálculo que intervienen en la solución de las ecuaciones que rigen el fenómeno del movimiento de la base, así como la obtención de los parámetros de respuesta que son importantes para el diseño o evaluación de una estructura. Las subrutinas del programa son modificables, e incluso se pueden desarrollar nuevas subrutinas que permitan posibilidades adicionales de cálculo.
- Los resultados obtenidos del análisis de una estructura utilizando UNDIN 1.0 son casi iguales a los calculados con programas comerciales como SAP2000© o ETABS©. Las pequeñas diferencias se presentan debido a que el programa desarrollado no utiliza exactamente los mismos procedimientos de cálculo implementados en los programas comerciales.
- Se espera que el programa desarrollado contribuya al aprendizaje y la investigación en el análisis dinámico elástico e inelástico de estructuras. Así mismo, se desea que UNDIN 1.0 sea una herramienta de cálculo en la práctica profesional del diseño estructural.
- Se recomienda implementar en futuras versiones del programa los siguientes procedimientos:
 - Incluir resortes rotacionales a flexión que dependan del nivel de la fuerza axial y resortes a cortante y axial que permitan representar con mayor aproximación el comportamiento inelástico de las columnas y en general de otros sistemas estructurales.
 - Incluir aceleraciones en la base que representen el movimiento diferencial de los apoyos.
 - Establecer las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada con el fin de incluir los efectos de la no linealidad geométrica.

Desarrollar un preprocesador y posprocesador gráfico propio que permita visualizar los datos de entrada y los resultados.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Dirección Nacional de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Bogotá por su apoyo a través del Proyecto de Investigación 16046 de 2012.

Referencias

- AIS. (2010). *Reglamento Colombiano de Construcción Sismo Resistente NSR-10*. Bogotá D.C (Colombia): Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial.
- Bathe, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (1995). *Dynamics of Structures* (Third ed.). Berkeley, California (USA): Computers and Structures, Inc.
- Chopra, A. K. (2001). *Dynamics of Structures. Theory and Applications to Earthquake Engineering* (Second Edition ed.). Upper Saddle River, New Jersey (USA): Prentice Hall.
- García, L. E. (1998). *Dinámica Estructural Aplicada al Diseño Sísmico*. Bogotá D.C (Colombia): Universidad de los Andes.
- Hibbeler, R. C. (2010). *Ingeniería Mecánica - Dinámica* (Decimosegunda ed.). México: Pearson Educación.
- Linero, D. L. (2008). *PEFiCA. Programa de Elementos Finitos a Código Abierto*. Bogotá D.C (Colombia): Universidad Nacional.
- Linero, D. L. (2012). *Apuntes de Clase Análisis Matricial Avanzado*. Bogotá D.C: Maestría en Ingeniería - Estructuras. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.

- Linero, D. L., & Garzón, D. A. (2012). Enseñanza del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería Civil y Mecánica Utilizando el Programa de Computador a Código Abierto PEFiCA. *Revista Educación en Ingeniería*, 7, 12.
- PEER. PEER Ground Motion Database. http://peer.berkeley.edu/peer_ground_motion_database, 2013
- Quiroga, J. L. (2008). *Estimación de la Respuesta Sísmica No Lineal en Edificios de Hormigón Armado: Variabilidad de Parámetros de Modelación y su Influencia en la Evaluación del Desempeño Estructural*. Magister en Ciencias de la Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago de Chile.
- Spinel, F. A. (1993). *Rigidez Lateral de Pórticos Rectangulares*. Bogotá D.C: Departamento de Ingeniería Civil - Sección de Estructuras. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Colombia.
- Wilson, E. L. (2002). *Three - Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures. A Physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering* (Third Edition ed.). Berkeley, California (USA): Computers and Structures, Inc.

Sobre los autores

Francisco Leonardo Noy Hilarión

Ingeniero civil y magister en Ingeniería – Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, en Bogotá, D.C. flnoyh@unal.edu.co.

Dorian Luis Linero Segrera

Ingeniero civil, magister en Estructuras de la Universidad Nacional de Colombia, doctor en

Análisis Estructural de la Universidad Politécnica de Cataluña (España) y Profesor Asociado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, en Bogotá, D.C. dllineros@unal.edu.co.

Los puntos de vista expresados en este artículo no reflejan necesariamente la opinión de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería.