Revista Educación en Ingeniería
ISSN 1900-8260
Junio de 2007 • N°. 3 • Pp 55-65 • Publicado en línea por la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería -ACOFI- www.acofi.edu.co
Recibido: 20/03/2007 • Aceptado: 16/05/2007

MATEMÁTICAS, INGENIERÍA Y COMPUTADORA

Luis Alberto Toro Carvajal
Universidad Autónoma de Manizales, Manizales (Colombia)

Resumen

Este artículo realiza un estudio histórico del concepto de las matemáticas como ciencia, hasta llegar a su concepción moderna. Presenta la íntima relación que actualmente existe entre la matemática y la computadora, no solamente para hacer matemáticas, sino como instrumento de enseñanza de éstas. Especial atención se hace al impacto que la computadora tiene en la enseñanza de las matemáticas a los ingenieros. Como conclusión general, se destaca el hecho que es necesario cambiar radicalmente la forma como actualmente se enseña la matemática, desde el nivel escolar hasta el universitario, con la ayuda de recursos computacionales. Se hace mención de las habilidades no técnicas que los futuros ingenieros adquieren con el uso de las computadoras.

Palabras clave: matemáticas, computadora, habilidades no técnicas, enseñanza de las matemáticas, modelación.

Abstract

This paper makes a study of the historical development of the mathematics concept, for arriving to its modern conception. It presents the intimate relation that exists today between mathematics and the computer, not only for doing mathematics, as well as a tool for mathematics teaching. Special attention is made to the impact that the computer has on teaching mathematics to engineers. As a general conclusion, the fact that is necessary to change, in a radical way, the manner on how we teach mathematics, from elementary school to university level with the aid of computational resources is emphasized. Specials comments about the nontechnical skills that the engineers acquire with the use of the computers are made.

Key words: mathematics, computer, non-technical skills, modeling, teaching mathematics.

Introducción

Las matemáticas desempeñan un importante papel en nuestra visión del mundo, en la forma cómo actualmente es nuestra civilización tecnológica. Vivimos en una sociedad técnicamente desarrollada. Quedan cada vez menos lugares sobre la faz de nuestro planeta en los que, al mirar alrededor hasta donde alcanza el horizonte, no veamos productos de nuestra técnica: monumentales edificios, enormes puentes, líneas de transmisión de energía, cables telefónicos, carros rodando por las carreteras, aviones cruzando el cielo. La comunicación está hoy mediatizada por las matemáticas, transmitida en forma digitalizada a lo largo de cables o fibras ópticas. Las computadoras, que son máquinas que elaboran matemáticas, no se hallan solamente en las mesas de los ejecutivos de las transnacionales, sino en todas partes: desde los hornos microondas hasta los aviones, y desde los juguetes de los niños hasta los marcapasos de quienes sufren problemas cardíacos. En forma de estadísticas, las matemáticas se utilizan para decidir los alimentos que comemos, los productos que compraremos, los programas de TV que veremos, y aunque el voto es personal, la decisión de por qué candidato votar está influida por las encuestas. Como dice Devlin (2003):

> *Así como la era industrial quemó combustibles fósiles para propulsar sus máquinas, en nuestra actual era de la información el combustible principal que quemamos son las matemáticas. A medida que el papel de las matemáticas crece más y más con relación al pasado, se nos oculta cada vez más de la vista, creando un universo invisible que soporta gran parte de nuestras vidas. Así como ocurre que cada uno de nuestros actos está gobernado por las fuerzas invisibles de la naturaleza, como la gravedad, vivimos ahora en el universo invisible creado por las matemáticas, sujeto a leyes asimismo invisibles.*

Pero a fin de cuentas,¿qué es la matemática? En lo que sigue, se dará respuesta tal pregunta, y como una consecuencia de la respuesta, al menos desde el punto de vista del autor, se sigue el hecho de que se deben cambiar los actuales esquemas de enseñanza de las matemáticas, sobre todo en lo que respecta a su enseñanza a los ingenieros, cambio que deberá ser influido fuertemente por la utilización de recursos computacionales.

¿Qué es la matemática?

Introducción. En la fase preparatoria de este trabajo, el autor preguntó a 120 estudiantes de diferentes programas de ingeniería, q*ué es la matemática*. Las respuestas variaron entre "No sé", "la matemática estudia el razonamiento", "la matemática estudia los números", "la matemática es necesaria para la ingeniería", entre otras. Esto revela una debilidad en la forma como los profesores de matemáticas enseñan esta ciencia. Se enseñan conceptos matemáticos, teoremas, demostraciones, aplicaciones pero no se explicita a los estudiantes lo que la matemática modernamente es. Creer que ésta es la ciencia de los números o que estudia el razonamiento, es un enorme error conceptual, pues tal creencia hace referencia a la descripción de la matemática de hace 2500 años. Quienes así piensan no se percatan de que la investigación en matemáticas es una actividad próspera y de amplitud mundial, que continúa creciendo con rapidez y generando nuevas aplicaciones; que la matemática ha dejado de ser el lenguaje de la física y de la ingeniería, y se han convertido en un instrumento esencial de las actividades bancarias y de las manufactureras, de las ciencias sociales y de la medicina; y finalmente, que el 90% de nuestra civilización tecnológica fue factible gracias al concepto de integral.

La respuesta a la pregunta ¿qué es la matemática? a variado varias veces con el curso de la historia y, es por tanto, una "función del tiempo".

Matemática prehelénica. Hasta aproximadamente el año 500 a.c., período que puede denominarse de la matemática prehelénica, la matemática *consistía realmente en el estudio de los números*, y fue dominada por los matemáticos egipcios y babilonios. Los documentos más antiguos que quedan sobre la matemática prehelénica, muestran que tales civilizaciones estaban ya en posesión de un sistema completo de reglas de cálculo con los enteros naturales mayores que cero, los números racionales mayores que cero, las longitudes y las áreas. Los textos babilónicos que han llegado hasta nosotros claramente indican una habilidad técnica considerable en el manejo de las ecuaciones de primero y de segundo grado. El álgebra babilónica, por la elegancia y seguridad de sus métodos, no podría ser considerada como una simple colección de problemas resueltos mediante una serie de tanteos empíricos.

Matemática griega. El período, denominado de la matemática griega, se encuentra entre los años 500 a. c. y 300 d. c. Los griegos se destacan como los primeros pensadores y científicos de Europa. Su matemática y filosofía nacen a la vez en estrecha relación. Una de sus mayores innovaciones consiste en empezar a organizar en ciencia abstracta los conocimientos anteriores, casi exclusivamente empíricos y de orientación práctica.

Un pensamiento matemático adulto ve la luz a finales del siglo VI a. c., en Jonia. En Mileto aparece Tales (624-548 a. c.), uno de los "siete sabios de Grecia", filósofo y científico al mismo tiempo, célebre como geómetra y como astrónomo, que estrena una nueva manera de pensar. Una de las ramas más antiguas de la matemática ha sido la geometría, la egipcia consistía especialmente en métodos para medir y separar los terrenos. Hasta Tales de Mileto no adquiere el carácter de una verdadera ciencia. Los griegos contemplaron los números al estilo geométrico, como medidas de longitud, y cuando descubrieron que había longitudes para las cuales sus números no tenían correspondencia (las longitudes irracionales), su estudio de los números se paralizó casi del todo. Para los griegos la matemática consistió en el estudio de los números y de *la forma.*

El descubrimiento del cálculo. No hubo ningún cambio de importancia en el carácter global de las matemáticas, ni ningún avance significativo en su contenido, hasta mediados del siglo XVII, cuando Newton en Inglaterra y Leibniz en Alemania inventaron, independientemente, el cálculo. El cálculo proporcionó finalmente el método buscado durante largo tiempo para investigar la continuidad en todas sus manifestaciones, en la ciencia o en la matemática pura. Todo cambio continuo, como en la dinámica o en la transmisión del calor y de la electricidad se puede abordar en la actualidad matemáticamente sólo gracias al cálculo y a sus perfeccionamientos modernos. Las ecuaciones más importantes de la mecánica, la astronomía y de las ciencias físicas, son ecuaciones diferenciales e integrales, producto del cálculo del siglo XVII. En matemáticas puras, el cálculo reveló de una vez continentes insospechados qué explorar y dominar, como con la creación de funciones nuevas que satisfagan ecuaciones diferenciales con o sin condiciones iniciales prescritas. Lo anterior puede resumirse diciendo que en esencia, el cálculo es el estudio del movimiento y del cambio. Si un problema implica el cambio de unas cantidades respecto de otras, inevitablemente se debe recurrir a los potentes métodos del cálculo para hallar su solución. Después de la invención del cálculo, la matemática se convirtió en el estudio de los números, de la forma, *del movimiento, del cambio y del espacio.*

La demostración formal. A partir de la segunda mitad del siglo XVIII surgió un interés cada vez más creciente por las matemáticas en sí mismas, y no solamente por sus poderosas aplicaciones para la comprensión de los fenómenos naturales. Los matemáticos comenzaron a estudiar lo que permanecía detrás de la enorme potencia que el cálculo proporcionaba a la humanidad. La antigua tradición griega de la demostración formal cobró inusitada importancia, a medida que se desarrolló gran parte de las matemáticas puras de hoy día. Este proceso dio como resultado que a finales del siglo XIX, las matemáticas se habían convertido en el estudio del número, de la forma, el movimiento, el cambio y el espacio, y *de las herramientas matemáticas empleadas en su estudio.*

La abstracción y la estructura. Una de las características que más impresionan de las matemáticas actuales, es su poder de *generalización* y *abstracción*. Por ejemplo, que tienen en común el conjunto de todas las matrices del mismo tamaño, las funciones continuas de una variable real de valor real definidas en un intervalo cerrado [a, b], el conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial homogénea de primer orden, las magnitudes físicas de tipo vectorial: fuerzas, velocidades y aceleraciones, los vectores n-dimensionales? Todos estos conjuntos de naturaleza totalmente distinta pueden estudiarse conjuntamente bajo el nombre de una estructura abstracta (sin hacer referencia a la naturaleza del conjunto particular de objetos matemáticos: *generalización*) denominada *espacio vectorial* (*espacio lineal*). La idea de *estructura* domina por completo la matemática de hoy día. El matemático examina estructuras abstractas: estructuras numéricas, estructuras de formas, de movimiento y del cambio, de comportamiento, las estructuras con las que se repiten los sucesos aleatorios, las de simetría y la regularidad, las estructuras del razonamiento, las estructuras fundamentales del universo. De dónde provienen estas estructuras? Pueden ser imaginarias o reales, visuales o mentales, estáticas o dinámicas, puramente utilitarias. Su origen puede residir en el mundo real que nos rodea, o en las profundidades del espacio y del tiempo, o pueden residir en la actividad de la mente humana. La idea de estructura conduce a la definición moderna de la matemática, comúnmente aceptada hoy día por los matemáticos: *La matemática es la ciencia de las estructuras.*

La matemática y la física

Roger Bacon (1214-294), filósofo y científico inglés, uno de los maestros más influyentes del siglo XIII, escribió:

> *Las matemáticas y la experimentación son los únicos medios de llegar al conocimiento de la naturaleza.*

Posteriormente, Galileo (1564-1642), en una época en que el estudio de los cielos dominaba el pensamiento científico, escribió:

> *El gran libro de la naturaleza puede ser leído solamente por aquellos que conocen el lenguaje en el cual está escrito. Y ese lenguaje es el de las matemáticas.*

Galileo dio forma matemática a la distancia, el tiempo, la velocidad y la aceleración, haciendo de ellos los entes científicos (medibles experimentalmente) que todavía están en la dinámica clásica. Con lo anterior, buscó enunciar definiciones que respondieran a observaciones reiteradas. La creación de la mecánica por parte de Galileo fue el fruto de su pensamiento respecto de la relación entre física y matemática.

En una época más reciente, cuando el estudio de los procesos atómicos había ocupado la mente de muchos científicos durante una generación, el físico John Polkinhorne escribió en 1986 que:

> *Las matemáticas son la llave abstracta que abre la cerradura del universo físico*.

Los mayores éxitos de la matemática se han realizado sin duda en el campo de la física, donde esa disciplina ha sido calificada correctamente como la reina a la vez que la sirviente de las ciencias naturales. La monumental síntesis de Newton con su teoría de la gravitación y sus tres leyes del movimiento; la mecánica celeste, las leyes del electromagnetismo de Maxwell, las leyes de la transmisión de calor por conducción de Fourier, la ecuación de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos , la teoría matemática de la elasticidad, la mecánica cuántica, las teorías especial y general de la relatividad, por mencionar solamente algunas, representan hitos en el pensamiento científico debidos a la aplicación de las matemáticas para tratar de explicar el mundo físico.

Las aplicaciones de la matemática a la comprensión de la naturaleza han tenido una enorme influencia en la creación de nuevas matemáticas e impulsado el desarrollo de la matemática como un todo. Como indicios de cuán importante ha sido la influencia de la dinámica de Newton sobre el análisis, se pueden citar los siguientes. Puesto que la tierra no es una esfera, sino un esferoide, no se puede calcular su atracción sobre una partícula material exterior con la misma precisión que si su masa se concentra en el centro. Cuando después de Newton la astronomía se hizo más exacta, había que tener en cuenta en los cálculos esa ligera desviación de la esfericidad perfecta, y para ello se requirió inventar nuevas funciones, como las de Legendre en la teoría del potencial. Un problema dinámico tan rudimentario como el del período de oscilación de un péndulo simple de longitud constante que se planteó Galileo, conduce inmediatamente en el caso general a un integral elíptica. Estas integrales, por inversión, engendraron la amplia teoría de las funciones doblemente periódicas, y como se reconoció a finales del siglo XIX, estas no son sino casos especiales de las funciones analíticas.

Todas las funciones anteriores en su conjunto sugirieron a Lagrange, Cauchy y otros de los últimos del siglo XVIII y principios del siglo XIX, teorías generales de funciones, que culminaron en la teoría de funciones de variable compleja. La teoría analítica del calor de Fourier, imaginada según la tradición de Galileo y Newton de observación controlada unida a las matemáticas, originó gran parte de la obra moderna de la teoría de funciones de variable real y del examen crítico de los fundamentos de las matemáticas.

Ingeniería y matemáticas

Introducción. Para entender el papel de las matemáticas en las ingenierías, tomemos como ejemplo la definición de Ingeniería Química, contenida en el Artículo 1o. Ley 18 de 1976:

> *Para todos los efectos legales, entiéndase por ejercicio de la Ingeniería Química, la aplicación de los conocimientos y medios de las Ciencias Físicas, Químicas y Matemáticas y de las Ingenierías, en el análisis, administración, dirección, supervisión y control de procesos en los cuales se efectúan cambios físicos, químicos y bioquímicos para transformar materias primas en productos elaborados o semielaborados, con excepción de los químico-farmacéuticos, así como en el diseño, construcción, montaje de plantas y equipos para estos procesos, en toda entidad, Universidad, Laboratorio e Instituto de Investigación que necesite de estos conocimientos y medios.*

En la anterior definición entran en juego tres de las ciencias básicas: física, matemáticas y química. En lo que respecta a las matemáticas, ¿estaremos preparando a los ingenieros químicos, y a los demás ingenieros, con las matemáticas que necesitarán para este siglo XXI ?

Ingeniería y computadora. En 1989, la Nacional Academy of Engineering seleccionó *diez grandes logros sobresalientes en ingeniería* de los 25 años anteriores, que ponen de manifiesto el carácter multidisciplinario de la ingeniería y las formas en que esta especialidad ha mejorado nuestra vida, expandiendo las posibilidades para el futuro a la vez que provee una amplia variedad de interesantes y estimulantes carreras. Los diez logros son: el microprocesador; el alunizaje; los satélites de aplicación; diseño y fabricación asistidos por computador (CAD/CAM); el Jumbo Jet; materiales compuestos avanzados (por ejemplo el Kevlar); tomografía axial computarizada; ingeniería genética; láseres y la fibra óptica. Es innegable que el uso de la computadora fue de vital importancia para la obtención de varios de los logros mencionados. En el alunizaje, por ejemplo, la computadora desempeñó un papel clave, no sólo en los distintos sistemas, sino también en la comunicaciones requeridas durante cada vuelo a la luna. El diseño y fabricación asistidos por computadora (CAD/CAM) ha generado una nueva revolución industrial aumentando la rapidez y la eficiencia de muchos procesos de fabricación. El CAD permite realizar el diseño con una computadora, la cual después produce los planos finales, listas de componentes y resultados de simulaciones computarizados. El CAM usa los resultados del diseño para controlar maquinaria o robots industriales a fin de fabricar, ensamblar y mover componentes.

Matemática y computadora. Dado que la Matemática es la ciencia de las estructuras, en realidad los matemáticos activos investigan patrones donde quiera que surjan. Gracias a los programas gráficos por computadora, gran parte de las investigaciones de patrones están dirigidas ahora por lo que se puede ver con los ojos, en tanto que gigantes como Gauss, Poincaré y Riemman tuvieron que ver con los ojos de la mente. La palabra “Veo” siempre ha tenido dos significaciones distintas: percibir con la vista y entender con la mente. Durante siglos, en la jerarquía de la práctica matemática, la mente a dominado a la vista. Hoy día, el equilibrio parece restablecerse, conforme los matemáticos hallan nuevas formas de ver patrones, tanto con la vista como con la mente. El empleo de los gráficos por computadora puede resultar significativo para el matemático, y también para proporcionar al hombre del común una visión del mundo interior de las matemáticas. Por ejemplo, el estudio de los sistemas dinámicos complejos fue iniciado en 1920 por los matemáticos franceses Pierre Fatou y Gaston Julia, pero hubo que esperar hasta finales de la década de los setenta y comienzos de los ochenta para que el rápido desarrollo de las técnicas de gráficos por computadora permitiera a Benoit Mandelbrot y a otros matemáticos visualizar algunas de las estructuras con las que habían trabajado Fatou y Julia. Las figuras increíblemente bellas que surgieron de este estudio, los fractales, se convirtieron desde entonces en una especie de forma de arte por derecho propio.

El cambio en la práctica de las matemáticas nos obliga a repensar la educación matemática a todo nivel, desde la primaria hasta la universitaria. No sólo las computadoras, sino también las nuevas aplicaciones y las nuevas teorías, han ampliado de manera significativa el papel de las matemáticas en las ciencias, el mundo de los negocios y la tecnología. Los estudiantes que vivirán y trabajarán usando computadoras como herramientas de rutina necesitan aprender matemáticas distintas de las que nosotros hemos aprendido. Las prácticas escolares comunes, basadas en tradiciones con varios siglos de antigüedad, sencillamente no pueden preparar de manera adecuada a los estudiantes para las necesidades matemáticas de nuestro siglo.

De otro parte, el lamentable estado de la educación matemática en nuestro país también proporciona razones poderosas para buscar el cambio. Dado que los avances en matemáticas se construyen partiendo de *principios fundamentales*, sería conveniente que nuestros esfuerzos se dirigieran primero a devolver a los fundamentos consagrados por el tiempo su vigor original, antes de abordar los cambios ocurridos en la práctica contemporánea de las matemáticas. La sabiduría del pasado muestra sin lugar a dudas que las matemáticas tradicionales, *si se enseñan con más cuidado y son bien aprendidas, proporcionan una sólida preparación tanto para el mundo laboral como para los estudios de las matemáticas superiores*.

Enseñanza de la matemática y computadora. El objetivo más importante de las matemáticas escolares consiste en desarrollar en los estudiantes la habilidad de hacer razonamientos inteligentes con información cuantitativa. Los conceptos, las técnicas y los principios matemáticos que establecen los modelos de los aspectos cuantitativos de la experiencia son proporcionados por las estructuras de los sistemas numéricos, del álgebra y de la medición que han sido por largo tiempo el punto central de los planes de estudio escolares. Sin embargo, el advenimiento de las calculadoras electrónicas y las computadoras como herramientas de gran capacidad para representar y manipular información cuantitativa, ha puesto en entredicho las prioridades tradicionales de la instrucción en estos temas. Hoy día, no tiene sentido dedicar partes considerables de los planes de estudio escolares a capacitar a los estudiantes en algoritmos aritméticos o algebraicos que pueden realizarse con rapidez y exactitud mediante calculadoras baratas y fáciles de usar. *Calcular extensas sumas de cuadrados de números reales manualmente no aumenta la comprensión, tan sólo entorpece la mente.* La disponibilidad de poderosos auxiliares de cálculo ha llevado a un aumento significativo de la variedad de situaciones en las que se aplica el razonamiento cuantitativo. En consecuencia*, las matemáticas escolares deben brindar a los estudiantes la preparación para usar sus conocimientos acerca de los números, el álgebra y la medición en formas flexibles y creativas, no sólo en cálculos rutinarios y predecibles.* La automatización de los cálculos rutinarios permite que el estudiante se concentre en otros aspectos de la solución de problemas: planear un análisis adecuado, interpretar los resultados en su contexto y hacer nuevas preguntas matemáticas sugeridas por un ejercicio.

Los comentarios precedentes relativos a las matemáticas escolares, puede aplicarse también a las matemáticas universitarias. La computadora, *usada racionalmente***,** puede convertirse en una valiosa herramienta para la enseñanza de las matemáticas universitarias, y no solamente desde la perspectiva del cálculo numérico, sino también para el cálculo simbólico. Lenguajes de programación, tales como Matemática (Wolfram, 1991) y Matlab (Pérez, 2002; Etter ,1997; Van, 2000) tienen incorporadas una amplia variedad de herramientas de cálculo simbólico, que permiten por ejemplo, realizar factorizaciones , reunir términos semejantes, calcular límites, realizar las operaciones matemáticas básicas con funciones, calcular derivadas e integrales, y resolver analíticamente ecuaciones diferenciales ordinarias y ciertas parciales. Las herramientas numéricas y simbólicas de tales lenguajes, puestas al servicio de la enseñanza de la Matemática, pueden ayudarnos a cambiar el modo como tal ciencia se enseña actualmente en nuestras universidades.

Sin lugar a dudas, las ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) son un instrumento matemático utilizado por ingenieros y científicos para modelar fenómenos de la naturaleza. Hallar soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales fue la tarea primordial de muchos matemáticos del siglo XVIII y XIX. Los cursos actuales de ecuaciones diferenciales ordinarias siguen esta tradición, dando a entender a los estudiantes de ingeniería, que el objetivo principal del estudio de las ecuaciones diferenciales consiste en *hallar artificios de cálculo que les permitan resolverlas*. Existen tratados (Murphy, 1960) sobre ecuaciones diferenciales donde se analizan las técnicas conocidas para su solución. De otra parte, un programa de cómputo simbólico como *Mathematica puede dar cuenta de la mayoría* de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se estudian en un curso normal de tal asignatura. Existen otros métodos mediante los cuales es posible estudiar las ecuaciones diferenciales: métodos cualitativos (Strogatz, 1994; Verhulst, 1985; Isaza y Campos, 2002), numéricos y de aproximación (Chapra y Canale ,1999).

No se debe creer por lo anteriormente expuesto que es necesario desechar los métodos para hallar soluciones cerradas de ecuaciones diferenciales, lo que se quiere expresar es que se debe mermar el énfasis en tales métodos, y centrarse por ejemplo, en *aspectos más teóricos, a métodos cualitativos, de modelación, introducción a los sistemas dinámicos y al caos*. Al fin al cabo, nosotros los ingenieros, usamos las ecuaciones diferenciales para modelar fenómenos del mundo real, y una vez obtenido el modelo, lo que necesitamos son simulaciones numéricas y/o gráficas por computadora para estudiar el sistema bajo variadas condiciones, y esto es lo que permite finalmente utilizar los datos obtenidos para el diseño en ingeniería.

Las precedentes observaciones también pueden aplicarse al curso de cálculo diferencial e integral, donde los métodos de derivación e integración abarcan gran parte del curso, y si analizamos con detenimiento los demás cursos de matemática que se imparten en nuestras universidades, llegaremos a la conclusión que siempre es posible utilizar los recursos computacionales para enseñarlos mejor, hacerlos más agradables, interesar más a nuestros estudiantes; enseñarles más y mejores matemáticas; desarrollar sus capacidades intelectuales (que por supuesto las tienen y en abundancia), y dado que las matemáticas fueron *creadas y desarrolladas por seres humanos para seres humanos,* probarles que ellas *están al alcance de quien quiera estudiarlas, conocerlas y practicarlas;* y finalmente, siguiendo a Hardy (1940), mostrarles a nuestros estudiantes que *las matemáticas son bellas y que en nuestro universo no hay lugar permanente para las matemáticas feas.*

Ejemplos. Los siguientes tres ejemplos, aunque sencillos, ilustran el uso de la computación gráfica, simbólica y numérica para enseñar matemáticas.

Ejemplo 1

Calcular el área encerrada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $y = x - 4$. El siguiente código escrito en *Mathematica,* cuya sintaxis es autoexplicativa, resuelve el problema

Clear[f]
f [x_]:= Sqrt [2x] {*definición de la parábola*}
Clear[g]
g[x_]:=x-4 {* definición de la recta*}
Plot [{f[x],-f[x], g[x]}, {x, 0 ,12}]; {*gráfica de la recta y la parábola*}

La gráfica de las dos curvas se muestra en la Figura 1

NSolve [4+y==y*y/2, y] {*cálculo de las ordenadas de los puntos de corte*}
{ y -> -2., y -> 4.} {* respuesta de *Mathematica**}
Clear [area]
Area =Integrate [4+ y - y*y/2,{y,-2,4}]
{* aplicación de la fórmula para hallar el área entre las dos curvas***}**
18 {respuesta de *Mathematica*}

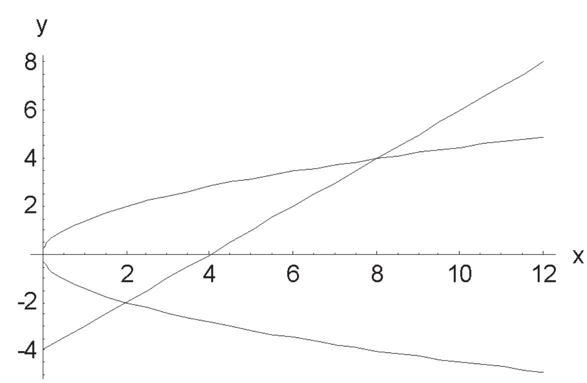

Figura 1. Gráfico de recta y parábola.

Ejemplo 2

Un tanque de 200 galones (gal) inicialmente contiene 100 lb. de sal disueltos en 100 gal de agua. Hacia el tanque fluye salmuera que contiene 3 lb/gal a razón de 5 gal/min. La mezcla, perfectamente agitada, fluye hacia fuera del tanque a razón de 4 gal/min. Cuánta sal contiene cuando se llena?

Este problema es importante debido a que a los estudiantes de ingeniería se les debe hacer énfasis en el uso de las ecuaciones diferenciales como instrumento para modelar fenómenos de la naturaleza. Lo importante aquí es la *obtención del modelo* y una vez obtenido, usar un programa de cómputo simbólico para obtener su solución analítica (cuando ello es posible) y/o analizar numéricamente su solución.

El volumen del tanque cumple la relación:

$$v(t) = 100 + t \qquad (1)$$

El cambio en la cantidad de la sal en el tanque del instante al instante (minutos) está dada por la relación

$$\Delta x = (5)(3)\Delta t - 4\left[\frac{x}{100+t}\right]\Delta t \qquad (2)$$

y tomando límites cuando , se llega a que el problema de valor inicial (PVI) del problema propuesto es

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4}{100+t}x = 15, \quad x(0) = 100 \qquad (3)$$

Las siguientes instrucciones, en *Mathematica,* resuelven el PVI (3).

DSolve [{x' [t] + 4/(100+t)*x[t]==15, x[0]==100},x[t], t]

x [t] ->(10000000000+1500000000*t+30000000*t^2 + 300000*t^3 +1500*t^4 + 3*t^5)/ (100 + t)^4 {*solución dada por *Mathematica** }

De la ecuación (1), se tiene que el tanque se llena en 100 min., y la concentración, cuando el tanque está lleno, se calcula con

N [Dsolve [{x' [t] +4/ (100+t)*x[t]==15, x[0]==100},x[t], t]]/.t->100
{{x [100] ->587.5}} {*respuesta de *Mathematica* *}

Pero se puede hacer más que hallar la concentración. Se puede graficar la solución, resolviendo numéricamente el PVI (3). Esto se realiza mediante las instrucciones.

Clear [sol]
sol=NDSolve [{x'[t]+4/(100+t)*x[t]==15, x[0]==100},x,{t,0,100}] ;
Plot [Evaluate [x[t]/.sol], {t,0,100}] ;

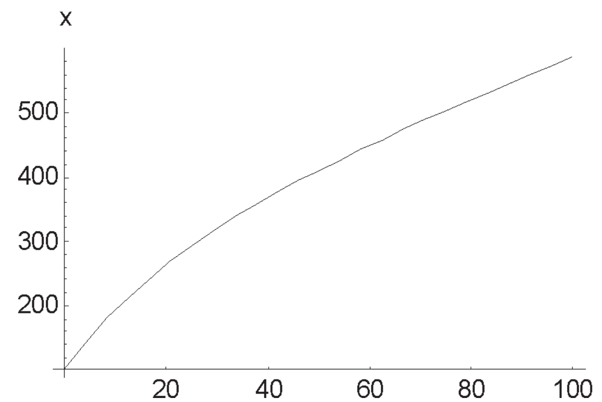

Figura 2. Gráfica de concentración x(t).

Ejemplo 3

Calcular $\int \cos(x)^4 \sin(x)^3 \, dx$. Esta integral puede calcularse fácilmente en Matlab, con las instrucciones:
syms x;
Int ('cos(x) ^3*sin(x)^4', x)

La respuesta de Matlab es

-1/7*sin(x)^3*cos(x)^4-3/35*sin(x)*cos(x)^4+1/35*cos(x)^2*sin(x)+2/35*sin(x)

Valor agregado del uso de la computadora

Existen otros aspectos benéficos para el futuro ingeniero en el uso de la computadora, relacionadas con la adquisición de capacidades no técnicas adicionales.

1. Los ingenieros requieren firmes **habilidades de comunicación** tanto para presentaciones orales como para preparar materiales escritos Las computadoras proporcionan software que ayuda a escribir sinopsis y elaborar materiales y gráficas para presentaciones e informes técnicos.
2. **Proceso/diseño/ fabricación** que consiste en llevar una idea de concepto a producto, es algo que los ingenieros debemos entender por experiencia propia. Cada paso de este proceso utiliza computadoras: análisis de diseño, control de máquina, ensamblado con robots, asegu-ramiento de la calidad y análisis de mercados.
3. Los equipos de ingeniería del futuro van a ser **equipos interdisciplinarios,** igual que los actuales. Aprender a interactuar en equipos y

desarrollar estructuras organizativas para la comunicación eficaz dentro de los equipos es una habilidad importante de los ingenieros.

4. Los ingenieros de nuestro siglo necesitan entender el **mercado mundial.** esto implica entender diferentes culturas, sistemas políticos y entornos de negocios. Los cursos sobre estos temas y de idiomas extranjeros ayudan a adquirir esta comprensión, y los programas de intercambio con experiencias internacionales proporcionan conocimientos valiosos para desarrollar un entendimiento más amplio del mundo.
5. Los ingenieros resolvemos problemas, pero los problemas no siempre se formulan con cuidado. Un ingeniero debe ser capaz de extraer un enunciado del problema de un análisis del mismo y luego determinar las cuestiones importantes relacionadas con él. Esto implica no sólo crear un orden, sino también aprender a correlacionar el caos; no sólo significa **analizar** los datos, sino también **sintetizar** una solución. La integración de ideas puede ser tan importante como la descomposición del problema en partes manejables. La solución de un problema podría implicar no sólo un razonamiento abstracto sobre el mismo, sino también aprendizaje experimental a partir del entorno del problema.
6. Las soluciones a los problemas también deben considerarse en su **contexto social.** Es preciso abordar cuestiones ambientales mientras se consideran alternativas a los problemas. Los ingenieros debemos estar conscientes de las implicaciones éticas al proporcionar resultados de prueba, verificaciones de calidad y limitaciones de diseño. Las cuestiones éticas nunca son fáciles de resolver, y algunos de los nuevos y excitantes logros tecnológicos generarán más discusiones de tipo ético. Surgen cuestiones complicadas con cualquier avance tecnológico porque las mismas capacidades que pueden hacer mucho bien a la humanidad, también se pueden aplicar a menudo en formas que resultan dañinas para la misma.

Conclusiones

Las conclusiones que se derivan de este artículo son:

1. **Los hechos.** La computadora, supone e impone una transformación sin precedentes en todos los ámbitos de la actividad humana, y como la máquina de vapor, determina las capacidades de la movilidad social, de las maneras de producir y de hacer, pero además condiciona nuestro estar en el mundo como personas, puesto que se trata de un ingenio que presenta fuertes analogías con las categorías *lógicas* y *mentales* de la persona. El fenómeno de la digitalización, que se concreta y representa en la computadora, transforma muchos niveles nuestra relación con el medio, con la creación de medio., y con los demás con el incremento de las condiciones de relación. El paradigma tecnocientífico, en el que nos estamos situando en los primeros 7 años del tercer milenio, es una cualitativa superación sistémica del paradigma ciencia-tecnología con el que tan satisfactoriamente trabajamos en la centuria pasada. El paradigma tecnocientífico ofrece, como marco epistemológico, posibilidades de desarrollo y progreso en todos los ámbitos del conocimiento, desde la biotecnología y la genética hasta la lingüística y la hermenéutica o la microcirugía, la astronáutica o la informática. El paradigma tecnocientífico se visualiza en la computadora como su metáfora.

La computadora interpela doblemente a la educación: por razón de su propia esencia, tratamiento de información y por razón del marco sociocultural en el que se inscribe.

En efecto. Las capacidades *lógico matemáticas* de la computadora lo convierten en un instrumento especialmente útil para *aprender*, puesto que son *categorías* de la *mente humana.* Podemos proyectar en la computadora aquello en lo que estamos pensando, convirtiéndose así en un instrumento para la operatividad mental, en forma análoga a como una palanca incrementa la fuerza de nuestro brazo o en que un mecanismo se proyecta la habilidad de la mano. La computadora trata señales digitales que, convertidas en datos codificados o información, son gestionados de acuerdo a determinados propósitos o programas. La computadora trata, pues *información*, y en la educación tratamos información; siempre que aprendemos *procesamos información*. El aprendizaje tiene que ver con percibir estímulos, codificarlos y decodificarlos, seleccionarlos, ordenarlos, almacenarlos, transmitirlos; en una palabra, gestionarlos de acuerdo a unos determinados patrones, esquemas e intenciones. Entre la computadora y la mente humana se puede reconocer una analogía de asimétrica potencia. De otra parte, en la sociocultura que enmarca nuestro vivir no puede ser más evidente la omnipresencia de la computadora en lo personal, en los procesos productivos, en las comunicaciones y en las telecomunicaciones; sin duda alguna, en todas las situaciones y actividades en las que el ser humano gestiona destrucción y barbarie deshumanizadora o creación, bienestar y progreso humanizador.

2. **¿Hacia dónde vamos?** Vamos hacia nuevos paradigmas en la educación. Vamos hacia una sociocultura de información intensa y de omnipresencia del audiovisual. La *mediateca*, entendida como un conjunto mediático y no como un lugar y dotación de equipos, ha de constituir el núcleo frontal del currículum. Los profesores, moviéndonos desde una función transmisora a otra de transacción o intercambio de conocimientos, debemos asumir un papel de animadores, planificadores de ayuda. Nuestros alumnos son sujetos que reciben información en cualquier lugar y momento. Por lo tanto, las situaciones escolares de enseñanza-aprendizaje, ya no pueden ser de almacenar-aprender desde la asimetría de conocimientos, sino un compartir, como un pacto entre quien enseña y quien aprende, de modo que ambos aprecien su estado de conocimientos. La escuela y la universidad, han de ser un escenario en el que se encuentren quienes están interesados en algún aprendizaje. Pero tal encuentro va a darse en las condiciones de presencia mediatizada en la que la vida aparece en la sociocultura del conocimiento y la comunicación. Presencia asincrónica y sincrónica a través de la tecnología o presencia denominada virtual, y presencia directa e inmediata. En ambas, la tecnología nos ofrece múltiples oportunidades para acceder a infinitas fuentes de conocimiento.

3. **El reto.** Nosotros los profesores y en particular los de matemáticas, no podemos dejar de asumir e integrar la computadora a nuestras habilidades y competencias. Debemos adquirir sólidos y extensos conocimientos acerca de las nuevas tecnologías de información-integración de las diferentes morfologías de la información: imagen, sonido, texto, computación gráfica, computación simbólica, computación numérica- debemos ser expertos en enseñar la lectura de la imagen y no sólo de textos. Nuestra formación como profesores no puede hacerse más sólo con libros. Ha de hacerse, además, con y en sistemas audiovisuales, multimedia y de comunicaciones. Es tan erróneo obviar estos instrumentos como pretender dejar de lado el papel, el tablero y los libros.

El docente universitario está especialmente afectado por esta reconversión. Su funcionalidad está expuesta a una profunda revisión. Años tras año vemos cómo la juventud que accede a las aulas universitarias llega impregnada por los estigmas de nuestro tiempo, la imagen, la información, las posibilidades comunicacionales. No puede caber ninguna duda frente a la afirmación siguiente: el profesional docente universitario no puede iniciar ningún nuevo curso sin incorporar la tecnología Web y el correo electrónico, por ejemplo, a sus planteamientos académicos, lo cual supone haber asumido todo un conjunto de conceptos y habilidades tecnológicas en su saber hacer común.

El reto que presenta el nuevo paradigma de la educación, no es tan sólo para los docentes, es también para el Estado. A este respecto, baste recordar el actual problema de la formación de más y mejores profesores de matemáticas, que como lo expresó el Editorialista del Tiempo (El Tiempo, 16 de Agosto de 2005):

> A*cabar con el déficit de maestros de matemáticas es tan crítico para el futuro del país como acabar con el déficit fiscal.*

De nuestra parte agregamos, que en el actual mundo globalizado, también es cuestión de *supervivencia científica y tecnológica* de nuestro país.

Los profesores Francy Nelly Jiménez (Msc en Física y estudiante del Doctorado en Ingeniería de la Universidad Nacional), Hugo Hernán Ortiz

(Msc en Enseñanza de la Matemática), y el autor de este trabajo, adscritos al Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Manizales (UAM), y miembros del Grupo de Investigación en "Física y Matemáticas con Enfasis en la Formación de Ingenieros" (Clasificación C de Colciencias), estamos finalizando la etapa de redacción del proyecto " Incorporación de Nuevas Tecnologías a la Enseñanza de la Matemática"., que como su nombre lo indica, tiene como objetivo fundamental incorporar a la enseñanza de las matemáticas en nuestra universidad los recursos computacionales con que actualmente disponemos.

Referencias

BELL, E.T. (1995). Historia de las Matemáticas. Fondo de Cultura Económica.

CAMPBELL, A.B. (1993). Applied Chaos Theory: A Paradigm for Complexity. Academic Press.

CAMPOS, Diógenes Romero, José Fernando Isaza Delgado. (2002). Prolegómenos a los Sistemas Dinámicos. Universidad Nacional de Colombia.

CHAPRA, Steven C., RAYMOND P. Canale (1999). Métodos Numéricos para Ingenieros. McGraw- Hill.

CORDERO, Luis; FERNÁNDEZ, Marisa y GRAY, Alfred (1995). Geometría Diferencial de Curvas y Superficies con Mathematica. Addison-Wesley Iberoamericana, S.S.

DEVLIN, Keith. (2003). El Lenguaje de las Matemáticas. D'vinni Ltda., Colombia.

EDWARDS, C.H. & PENNY, David E. (2000). Ecuaciones Diferenciales. Prentice Hall.

EDWARDS, Steve; PLANE, Tiling and Fancy. Disponible en Internet en: http://www.spsu.edu/math/tile/

WEISSTEIN, Eric W. Tessellations. MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponible en Internet, en http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html

DELORES M., Etter. (1998). Solución de Problemas de Ingeniería con Matlab. Prentice Hall.

GRAY, A., MESSINO, M., and PINSKY, M. (1996). Ordinary Differential Equations with Mathematica. Springer Verlag.

GRAY, T. and GLYNN J. (1991). Exploring Masthematics with Mathematics. Addinson-Wesley Publishing.

MURPHY, G. (1960). Ordinary Differential Equations and their Solutions. D. Van Nostrand Company.

PÉREZ, César. (2002). Matlab y sus Aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería. Prentice Hall.

POOLE, Bernard J. Tecnología Educativa. (2001). Serie McGraw-Hill, Docente del siglo XXI. McGraw-Hill, Bogotá, Colombia.

STEEN, Lynn Arthur. (2001). La Enseñanza Agradable de las Matemáticas. Limusa, Noriega Editores.

STROGATZ, Steven H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Books Publishing, LLC.

STRUIK, Dirk J. (1967). A Concise History of Mathematics. Dover Publications, Inc.

The MathWorks. (1998). Matlab, The Language of Technical Computing.

VAN, Charles F. (2000). Introduction to Scientific Computing (Second Edition). Prentice Hall.

VERHULST, Ferdinand. (1990). Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer Verlag.

WOLFRAM, S. (1991). Mathematica, a System for Doing Mathematics by Computer (Second Edition). Addinsson Wesley Publishing.

Sobre el autor

Luis Alberto Toro Carvajal

El autor del artículo es Ingeniero Químico (Unal 1979), Magíster en Ciencias (Univalle 2001) y PhD en Matemáticas (Lacrosse University, 2006). Es profesor de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Manizales (UAM). Sus intereses científicos están relacionados con la investigación en Mecánica Computacional (solución numérica de problemas de Mecánica de Fluidos y Transferencia de calor, usando el Método del Elemeto Finito) y como un producto de tales investigaciones está escribiendo un libro sobre el MEF y sus aplicaciones a la ingeniería. Además investiga en la aplicación de los recursos computacionales en la Enseñanza de la Matemática, un resultado es el artículo que presenta.

Dirección Postal: Carrrera 23 # 72-55, Barrio Milán, Manizales, Caldas. Mailto: luisalbertotoro@hotmail.com