ACOFI Asociación Colombiana de Facultades de ingeniería

Revista Educación en Ingeniería
http://www.educacioneningenieria.org

La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva

Lina María Peña-Páez [a] & John Fredy Morales-García [b]

[a] Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad de San Buenaventura, Bogotá, Colombia. lpena@usbbog.edu.co
[b] Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad de San Buenaventura, Bogotá, Colombia, johmorales@usbbog.edu.co

Resumen— Concebir la modelación matemática como una herramienta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Básicas en la formación de ingenieros, le brinda la posibilidad a los docentes de re-evaluar la manera como se abordan los contenidos programáticos, y así, acercar a los estudiantes a su área específica de conocimiento. Cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones que le atañan en su profesión comienzan a comprender la necesidad de sus cursos de ciencias básicas, es así como en este artículo se presentan situaciones contextualizadas, que le permiten a los estudiantes de los diferentes programas de ingeniería de la Universidad de San Buenaventura, una aproximación al concepto de la integral definida como área bajo la curva.

Palabras Clave— modelación matemática, cálculo integral, área, ingeniería, enseñanza-aprendizaje.

Recibido: 19 de enero de 2016. Revisado: 10 de febrero de 2016. Aceptado: 15 de febrero de 2016.

The mathematical modeling as a strategy for teaching and learning: The case of the area under the curve

Abstract— The mathematical modeling as a didactic tool for teaching and learning the Basic Sciences in the training of engineers provides teachers the opportunity to re-evaluate the curriculums, and so bring students their specific area of expertise. When students are faced with situations that pertain to their profession, begin to understand the needs of their basic science courses, so as this article bring contextualized situations that allow students from different engineering programs, an approach to the concept of the definite integral as area under the curve

Keywords— mathematical modeling, integral calculus, area, engineering, teaching and learning.

1. Introducción

Los profesores de Ciencias Básicas, en una Facultad de Ingeniería, en su práctica docente, inevitablemente se enfrentan a los cuestionamientos de los estudiantes en cuanto al para qué y por qué de los cursos de física y matemáticas, dado que ellos muestran mayor interés por los cursos propios de su disciplina, y aunque teóricamente se encuentren muchas justificaciones, en la práctica no pareciera tan evidente para los estudiantes la necesidad de los cursos de ciencias básicas [1,2].

La búsqueda de la metodología más acertada para abordar las clases de Ciencias básicas, tiene una implicación directa sobre el currículo, sin embargo, no debe olvidarse que estos cursos se orientan en una facultad de ingeniería, lo que conduce a revisar no sólo el aspecto de la didáctica de las matemáticas; sino las necesidades y requerimientos esperados de un estudiante de cualquier programa de ingeniería. Es por ello, que las actividades propuestas a los estudiantes, también responden, a las discusiones dadas en los foros convocados por la Asociación Colombiana de facultades de ingeniería Acofi en el 2006, que posteriormente fueron presentadas en el libro: *El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación*. Allí, se plantean tres características básicas del currículo de ingeniería, entre las que se destaca: "predominio del componente formativo sobre el informativo. Solidez en la formación en Ciencias Básicas: Matemáticas, Física, Química e Informática. *Objetivo: aprender a aprender de por vida"* [3]. Más adelante, se enuncian las competencias esenciales de los ingenieros, entre las que se consideran más relevantes están: "capacidad para *modelar* fenómenos, capacidad para *resolver problemas mediante la aplicación* de las ciencias naturales (física química, biología) y las matemáticas, utilizando un lenguaje lógico simbólico" [3].

Bajo este marco, el propósito de esta investigación es el de plantear situaciones contextualizadas que le permitan al estudiante de los programas de ingeniería, identificar la integral definida como el área comprendida entre dos curvas, y para ello se utilizará como estrategia metodológica la modelación matemática.

2. Antecedentes teóricos

Las investigaciones en modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, muestran que estos procesos son exitosos cuando los docentes utilizan los modelos como estrategia y componente central para abordar el currículo[4], no sólo en el aspecto académico sino que abarca aspectos actitudinales y de percepción positiva, dado que los estudiantes disfrutan más cuando la enseñanza involucra actividades de modelación matemática [5].

La modelación matemática puede entenderse como el proceso de construcción de un modelo, dirigido de una situación real a un modelo matemático, más específicamente, la manera de conectar el mundo real con las matemáticas (Blum, 1993). Para llevar a cabo este proceso se requiere una secuencia de actividades que se conocen como: "círculo de modelación", que básicamente, debe completarse en siete pasos: construcción, estructura, matematización, trabajo matemático (resolución), interpretación, validación y exposición [7]. Concebir la modelación matemática como un proceso, en el que en cada etapa es posible evidenciar las dificultades y avances de los estudiantes, es una forma de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

Cuando se plantea una tarea de modelación a los estudiantes, los objetivos, las preguntas de investigación y la naturaleza del diseño, planteamiento y, principalmente, el rol de la modelación en las tareas es de naturaleza variada. Por ejemplo, la perspectiva puede tener por objetivo lo utilitario y pragmático, o la intención puede ser reconstruir la matemática a través de la modelación. Otra intención podría ser explorar la relación del sujeto y las metas psicológicas o la reflexión sobre el uso de la modelación matemática. Para este trabajo la modelación matemática se ha considerado como un medio para el aprendizaje de las matemáticas. [8].

Investigaciones precedentes muestran cómo la modelación matemática permite aproximar al estudiante a temas propios de los cursos de Ciencias Básicas, por ejemplo, el uso de modelos RC en ecuaciones diferenciales y su posterior resolución acercan al estudiante al significado de las soluciones de problemas con condiciones iniciales [8], proponer tareas que involucren los pasos de la modelación permite al estudiante comprender la importancia tanto de la construcción de modelos concretos como de modelos físicos, así mismo, la retroalimentación en clase de las tareas propuestas le permite a los estudiantes verificar sus propias soluciones. Más aún, el estudio recomienda para futuras intervenciones, el diseño de actividades con todas las fases de la modelación, de acuerdo a los cursos que cada profesor tenga a su cargo [8].

Cuando se plantean actividades, es bien sabido, que el proceso de construcción de los conceptos abstractos les resulta difícil a los estudiantes, de allí que el uso de actividades de modelación, a través de sus diferentes etapas, les ofrece una posibilidad para confrontar las nuevas necesidades conceptuales. La investigación de Posanni y otros, sobre el uso de modelos para la enseñanza del algebra lineal, enfatiza en dicha necesidad, para los autores, orientar el proceso de enseñanza que introduzca actividades adicionales ayudan a los estudiantes a identificar la necesidad de procesos de construcción para aprender conceptos abstractos del algebra lineal [9].

Bajo este marco, se asumirá la modelación matemática como una herramienta didáctica para la enseñanza-aprendizaje, que en este caso particular, se refiere a la integral definida, interpretada como el área bajo la curva. Ahora bien, una herramienta didáctica es un medio y tiene una intención, de esta forma la modelación matemática puede ser considerada como herramienta didáctica. Las investigaciones, afirma Biembengut, sobre modelación matemática señalan que ésta “puede representar un avance en la enseñanza de las matemáticas en clase, porque ésta deja de ser una mera transmisión de técnicas de resolución (del tipo: siga el modelo) y pasa a ser presentada como herramienta o estructura de otra área del conocimiento”[10].

En el curso de cálculo integral, se utilizan los problemas de área y distancia para aproximar a los estudiantes a la idea de una integral definida, en el texto *Cálculo. Conceptos y Contextos*, 4 edición, del autor James Stewart (texto guía utilizado en la universidad para los estudiantes de ingeniería), aparece una sección introductoria en la que se analiza el significado de la palabra área, y para ello, se inicia con las figuras planas cuya fórmula es conocida, y se muestra cómo a una figura de lados rectos, se le puede encontrar el área, a partir de la descomposición de la figura en rectángulos, triángulos, según la forma de la mencionada figura [11].

Usando la suma de Riemann y el hecho de que una función sea positiva, es posible interpretar la integral definida cómo el área bajo la curva. En secciones posteriores, el autor muestra cómo encontrar áreas comprendidas entre dos curvas. Ahora bien, la idea de comprender la integral definida como el área bajo la curva, al igual que, entender que la ecuación de una parábola y su gráfico se refieren al mismo objeto matemático, pero no necesariamente dan cuenta de las mismas propiedades del objeto[12], fue uno de los temas a desarrollar en esta investigación.

Por otra parte, en algunos textos de cálculo, es frecuente encontrar ejercicios eminentemente algebraicos, más aún, sobresalen las aplicaciones rutinarias en las que el resultado es lo más importante; en cuanto a las gráficas, el papel fundamental de éstas es la visualización de los resultados, dotando los conceptos de un carácter estático [13]. Esta situación, no es sólo recurrente en el concepto de función, donde se le explica al estudiante que la función puede ser representada de cuatro formas diferentes (sección 1.1) [11], sino que se encuentra cuando se desarrolla el tema del área entre curvas como aplicación de la integral definida, en la sección 6.1, de los 45 ejercicio propuestos, sólo en 5, se le solicita al estudiante que plantee la integral definida y la resuelva, a partir de la gráfica proporcionada [11].

El aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo de un pensamiento conceptual serán favorecidos al involucrar en la práctica educativa tareas contextualizadas, que le permitan transitar por las diferentes representaciones semióticas[12]. Plantear este tipo de situaciones requiere de la creatividad del profesor, puesto que la evidencia muestra que no muchas de estas actividades se encuentran en los libros de cálculo usados en la universidad.

3. Metodología

Para la construcción de una propuesta metodológica, que toma como principal insumo la modelación matemática, debe considerarse, el contenido programático, al cual un profesor está sujeto cuando orienta cualquier curso de Ciencias Básicas. Así mismo, no puede ignorarse el hecho significativo que los docentes que asumieron el reto no eran “expertos” en orientar cursos bajo esta nueva herramienta didáctica, ni los estudiantes habían experimentado antes este tipo de metodología. Bajo esta perspectiva, se definió una primera fase del proyecto denominada “sensibilización de los estudiantes”, que se desarrolló durante el curso de cálculo diferencial, y que permitió un acercamiento a la Modelación Matemática, escenario que Biembengut ha denominado pre-modelación y que implica el desarrollo de ciertas estrategias:

- Presentar cada uno de los contenidos del programa a partir de modelos matemáticos ya conocidos;

- Aplicar trabajos o proyectos realizados por colegas, por un tiempo corto, con un único grupo y de preferencia aquél que tiene mejor dominio de matemáticas.
- Como trabajo extra-clase, para los alumnos, se solicita que busquen ejemplos o intenten crear sus propios modelos, siempre a partir de la realidad [14].

La secuencia utilizada implicó justificación de proceso, elección del tema, desarrollo de contenido programático, ejemplos análogos - fijación de conceptos y evaluación y convalidación de los resultados [10].

Finalizada la "etapa de sensibilización", los estudiantes y docentes se encontraban preparados para abordar los pasos necesarios que implica la metodología de la modelación matemática, así, durante el siguiente semestre, en el curso de cálculo integral, se desarrollaron las situaciones en las que a través de la modelación matemática y bajo lo que Blum denomina "círculo de la modelación" fue posible acompañar el proceso de aprendizaje y observar fortalezas, dificultades y resultados de los estudiantes involucrados en este experimento pedagógico.

3.1. Participantes

El experimento pedagógico se desarrolló en dos partes, la primera denominada "etapa de sensibilización" se llevó a cabo con los estudiantes de primer semestre de los programas de ingeniería,, allí se encontraban inscritos estudiantes de ingeniería de sonido, aeronáutica, sistemas, telecomunicaciones, electrónica y macatrónica, esta etapa se realizó durante el curso "Cálculo Diferencial". La segunda parte, fue el diseño de actividades y resolución de las mismas bajo "el circulo de modelación" de Blum, ésta se llevó a cabo, especialmente, con los estudiantes de ingeniería de Sonido, Mecatrónica e ingeniería Aeronáutica, durante el curso de cálculo integral. El texto guía utilizado como fuente de información de los conceptos matemáticos fue el establecido en el currículo, a saber, "Cálculo conceptos y contextos" del autor James Stewart. Los temas abordados fueron: el concepto de función con sus diferentes representaciones y la derivada y su interpretación geométrica (etapa de sensibilización), y la integral definida como el área entre dos curvas.

3.2. Etapa de sensibilización

Esta etapa se desarrolló con los estudiantes de los cursos de cálculo diferencial, allí se realizó un acercamiento a la modelación matemática a través de la construcción de plantillas bidimensionales que permitieron armar objetos tridimensionales, de acuerdo con los intereses de cada programa de la Facultad. Por ejemplo, los estudiantes de ingeniería aeronáutica; construyeron plantillas de aviones, los de sonido; instrumentos musicales, los de telecomunicaciones y sistemas; antenas y memorias y los estudiantes de macatrónica; brazos robóticos.

3.2.1. Diseño de las plantillas bidimensionales

Los estudiantes trabajaron en grupos de 3 personas, a cada grupo se le asignó una foto que contenía el dibujo que debían construir, en algunos casos los estudiantes trajeron su propia foto para hacer la construcción. Como el semestre académico en la Universidad está dividido en tres cortes de notas, el trabajo se organizó respetando estos tiempos, así: en el primer corte (5 semanas) los estudiantes debían descomponer la figura tridimensional elegida en partes bidimensionales, de tal manera que cuando se ensamblaran aparecía la misma figura de la foto. Luego esta plantilla bidimensional fue cuadriculada en papel milimetrado, para que de esta forma, pudiesen encontrar las ecuaciones que modelaban la figura, ahora bien, puesto que algunos de los estudiantes manejaban el programa Geogebra, ellos importaron directamente la plantilla al mencionado programa y con los comandos correspondientes encontraron las ecuaciones buscadas.

Durante el segundo corte (6 semanas), los estudiantes, usando el programa Matlab y las ecuaciones entregadas durante el primer corte, imprimieron la plantilla bidimensional en una hoja de papel y encontraron las tangentes a las curvas en puntos en diferentes puntos seleccionados. Finalmente, durante el último corte del semestre (5 semanas), los estudiantes construyeron su figura tridimensional a partir de la plantilla bidimensional, los materiales fueron diversos, por ejemplo, cartón paja, madera y acrílico (usando laser).

Las actividades propuestas por los docentes, la organización de las mismas y la resolución por parte de los estudiantes siguieron la secuencia establecida por Biembengut y Hein (2004), la que resultó más apropiada en esta etapa, dado que para los autores, en la modelación matemática como método de enseñanza-aprendizaje; el currículo es una parte imprescindible (Tabla 1).

3.3. Implementación de la etapa de modelación matemática

Esta etapa se desarrolló con los estudiantes del curso de cálculo integral, ellos trabajaron la modelación matemática a través de la construcción de planos bidimensionales en papel para construir objetos tridimensionales, de acuerdo con los intereses de cada programa de la Facultad. Al finalizar el semestre, se solicitó un informe escrito y una evidencia visual (un video) del trabajo realizado.

3.3.1. Diseño en papel del plano bidimensonal

Los estudiantes, nuevamente, trabajaron en grupos de 3 personas, cada grupo eligió la figura que quería armar según el programa de ingeniería en el que estaban inscritos (aviones, brazos mecánicos, antenas e instrumentos musicales).

Teniendo presente los tres cortes de notas, el trabajo se organizó respetando estos tiempos, así: en el primer corte (5 semanas) los estudiantes debían descomponer la figura tridimensional elegida en partes bidimensionales, de tal manera que cuando se armara apareciera la misma figura de la foto, esta descomposición se debe hacer de manera análoga a como se construye un cubo a partir de seis cuadrados, incluyendo las pestañas para pegarlo. Esta descomposición, fue cuadriculada en papel milimetrado, para de esta forma, al igual que en la etapa anterior, pudiesen encontrar las ecuaciones que modelaban la figura. Durante el segundo corte (6 semanas), los estudiantes, usando el programa Matlab y las ecuaciones entregadas

Tabla 1.
Los cuatro modelos y su respectiva asociación con las fases de la secuencia sugerida por Biembengut y Hein.

Fases	Situaciones
Justificación de proceso lo propuesto	Como habitualmente se hace en la Universidad, se socializó el Contenido Programático (currículo) con los estudiantes. Posteriormente, se justificó la conveniencia de abordar el estudio de tales contenidos contextualizados dentro de situaciones reales.
Elección del tema	En este primer "experimento" la figura (modelo) fue elegida por los docentes del curso de cálculo diferencial, basada en los intereses de los estudiantes de los diferentes programas de ingeniería, teniendo en cuenta los conocimientos adquiridos previamente, de tal manera que los estudiantes reconocieran buenas posibilidades para poder abordar con suficiente "libertad y versatilidad" los contenidos programáticos.
Desarrollo del contenido programático	De las temáticas presentes en el currículo del curso se abordaron las siguientes: los conceptos de dominio y rango, resolución de ecuaciones, diferentes representaciones del concepto de función y la derivada como pendiente de la recta tangente e la curva.
Ejemplos análogos - fijación de conceptos	Los docentes les presentaron a los estudiantes plantillas bidimensionales, que habían sido elaboradas por expertos en figuras decorativas, los modelos conseguidos fueron la de un avión y un helicóptero. Así mismo, en semestres anteriores los estudiantes del curso de "matemática básica" diseñaron un avión, definido funcionalmente, en Matlab, el que fue presentado para que tuviesen una visión de lo que deberían desarrollar con sus figuras elegidas
Evaluación y convalidación de los resultados	En este caso la validación de los resultados, fue constatada por los propios estudiantes, dado que el plano bidimensional que al ensamblarse producía la figura tridimensional debía ser lo más fiel posible a la foto entregada al iniciar el "experimento pedagógico". Finalmente, se solicitó un escrito, en el que cada grupo daba cuenta, de los resultados obtenidos y su relación con los contenidos programáticos.

Fuente: Los autores

durante el primer corte, imprimieron el plano bidimensional en una hoja de papel. Así mismo, encontraron el área superficial de la figura, a partir de la descomposición bidimensional de la misma, usando la integral definida.

Durante el último corte del semestre (5 semanas), los estudiantes armaron su figura tridimensional a partir del plano elaborado en Matlab, algunos cortaron y pegaron sobre cartón paja para darle más consistencia a su maqueta. Finalmente, cada grupo elaboró un video de una duración aproximada de 10 minutos, en el que evidenciaron cada uno de los pasos de la modelación matemática que les permitieron la construcción de su diseño, así como el posterior ensamblaje del mismo. Algunos de estos videos se pueden encontrar en la Web (Hernández y otros, 2013), dentro de su contenido aparecen explicaciones sobre cómo plantear ecuaciones lineales y cuadráticas a partir del conocimiento de la gráfica, el procedimiento para encontrar el área de una figura usando la integral definida y el significado de algunos comandos del programa Matlab y su correspondencia con los conceptos matemáticos. Para complementar esta experiencia contextualizada del uso de la modelación matemática para los procesos de aprendizaje, cada grupo escribió un artículo de 8 páginas, en el que dieron cuenta de los conceptos matemáticos usados para la consecución de su proyecto. [15]

Las tareas propias de un proceso de modelación matemática no son fáciles de asimilar por parte de los estudiantes, dado que se requiere de un análisis cognitivo que implica competencias tales como: "leer y comunicar, diseñar y aplicar estrategias a la resolución de problemas o trabajar matemáticamente"[16], así la secuencia de situaciones que permitieron el desarrollo de esta segunda etapa, obedecieron al *círculo de modelación* sugerido por Blum, el cual permitió ayudar al estudiante en este proceso, así como también evaluar dicho proceso por parte de los docentes. El mencionado círculo sugiere la secuencia de siete etapas, cada una con un objetivo como se establece en la Tabla 2.

Los docentes elaboraron una matriz de evaluación, que da cuenta de las mencionadas etapas del círculo de modelación. En la Tabla 3, encontramos un ejemplo de matriz de evaluación aplicada a los estudiantes.

4. Análisis de resultados

La *fase de sensibilización*, por un lado, acercó a los estudiantes al desarrollo del currículo usando la modelación matemática como metodología, y por otro, fortaleció aspectos necesarios para el desarrollo de dicha metodología, a saber, conceptos matemáticos de Precálculo y manejo del programa Matlab, fundamentales para el proceso.

Tabla 2
Etapas del círculo de modelación de Blum

Etapas	Objetivos
Construcción	Comprender la relación entre el área bajo la curva y la integral definida. Seleccionar una figura real Representar, en un plano bidimensional (x,y), las partes de la figura.
Estructuración	Construir la definición funcional de la figura bidimensional. Entregar todas las ecuaciones (líneas y curvas) que representen las partes de la figura Construir las gráficas de las ecuaciones especificando el dominio.
Matematización	Identificar el área superficial de la figura tridimensional. Reconocer el área superficial como la suma de las áreas bajo la curva de las partes que componen el plano bidimensional.
Resolución	Determinar el área superficial de la figura tridimensional. Resolver el área superficial usando la suma de las áreas bajo la curva de las partes que componen el plano bidimensional.
Interpretación	Interpretar de manera real y en contexto los resultados encontrados sobre el área superficial de la figura. Reconocer las unidades de medida del área superficial de la figura.
Validación	Construir de manera sólida (en físico) la figura tridimensional a partir del plano bidimensional obtenido en el programa Matlab.
Exposición	Socializar el proceso desarrollado a lo largo de la actividad.

Fuente: Los autores

Tabla 3
Matriz de evaluación ajustada al círculo de modelación de Blum

Evaluación		
Construcción		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
Se presenta una figura, pero es una figura simple y sin fundamento. No se presenta de manera organizada la figura tridimensional. No se tiene en cuenta la escala y no se especifican los ejes. No hay claridad en el proyecto y se percibe improvisación en la propuesta. No se puede construir la figura de manera sencilla y correcta.	Eligen una figura sencilla y con poca creatividad de acuerdo al programa de ingeniería al que pertenecen. Representan de manera correcta la figura. Sin embargo, falta presentación y organización de la figura tridimensional en un plano de dos variables. No se tiene en cuenta la escala, y no se especifican los ejes. Es posible construir la figura tridimensional a partir de los planos. Sin embargo, hay inconvenientes cuando se ensambla la figura. Falta calidad en los cortes y uniones.	Eligen una figura impactante y representativa de acuerdo al programa de ingeniería al que pertenecen. Representan de manera correcta y organizada la figura tridimensional en un plano de dos variables, teniendo en cuenta la escala, y especificando los ejes. Es posible construir de manera sencilla y preliminar la figura tridimensional a partir de los planos, teniendo en cuenta elementos como las pestañas para unir las partes y la calidad de los cortes y las uniones.
Estructuración		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
Las ecuaciones presentadas no permiten representar la figura. No se reconocen los dominios de las funciones y las gráficas no coinciden con la figura. Utilizan algunos tipos de funciones para representar la figura, en su mayoría son lineales y cuadráticas. Falta creatividad para representar la figura utilizando diferentes funciones. Presentan dificultades al graficar la figura bidimensional en Matlab. No reconocen los comandos necesarios para realizar la superposición de las ecuaciones.	Las ecuaciones presentadas permiten representar de algunas de las partes de figura. Los dominios de las funciones son adecuados, sin embargo, algunas gráficas no coinciden con la figura. Utilizan algunos tipos de funciones para representar la figura, en su mayoría son lineales y cuadráticas. Falta creatividad para representar la figura utilizando diferentes funciones. Realizan la gráfica de la figura bidimensional en Matlab. Sin embargo presentan dificultades al realizar superposición de las ecuaciones.	Las ecuaciones presentadas permiten representar de manera correcta las partes de figura, de manera que los dominios de las funciones son adecuados y las gráficas coinciden con la figura. Utilizan diferentes tipos de funciones para representar la figura (lineales, cuadráticas, exponenciales, racionales, etc.) Realizan la gráfica de la figura bidimensional en Matlab de manera correcta, superponiendo las ecuaciones encontradas.
Matematización		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
No presentan el área superficial de la figura tridimensional. Presentan de manera desorganizada e incompleta el área superficial de la figura tridimensional. No hay creatividad para seleccionar figuras regulares para construir la figura. No reconocen, ni aplican el concepto de integral definida para identificar las áreas de formas no regulares. Aun no comprenden el concepto de integral definida y su relación con el área superficial de la figura.	Presentan de manera parcial el área superficial de la figura tridimensional. Tienen algunas dificultades de organización y presentación. Utilizan algunas formas regulares para construir el área superficial (rectángulos, círculos, polígonos). Falta creatividad para la selección de las formas Aplican el concepto de integral definida para identificar las áreas de formas no regulares. Sin embargo, presentan dificultades para seleccionar los límites que corresponden a la región que se quiere analizar. Presentan algunas dificultades para platear las integrales definidas.	Presentan de manera organizada y completa el área superficial de la figura tridimensional. Utilizan formas regulares para construir el área superficial (rectángulos, círculos, polígonos, trapecios, entre otros) Aplican el concepto de integral definida de manera correcta para identificar las áreas de formas no regulares, teniendo en cuenta los límites que corresponden a la región que se quiere analizar. Plantean de manera correcta las integrales definidas para determinar el área entre dos curvas.
Resolución		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
No Determinan el área superficial de la figura seleccionada. No identifican y aplican métodos de integración para resolver las integrales definidas	Presentan algunas dificultades al resolver de manera el área superficial de la figura seleccionada. Tienen dificultades al utilizar diferentes métodos de integración para resolver integrales definidas.	Resuelven de manera correcta y exacta el área superficial de la figura seleccionada. Utilizan de manera correcta diferentes métodos de integración para resolver integrales definidas.
Interpretación		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
.Se percibe poca disposición para solucionar las dificultades de comprensión del concepto de integral definida y su relación con el área superficial para la construcción de figuras tridimensionales.	Aplica el concepto de área superficial en figuras tridimensionales. Sin embargo, se identifican algunas dificultades para relacionar el concepto de integral definida y su relación con el área superficial y en el reconocimiento de las unidades de medida.	Reconoce la importancia del área superficial de figuras tridimensionales, mediante ejemplos concretos. Identifica y reconoce de manera correcta las unidades de medida del área superficial.
Validación		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
No se presenta una figura sólida Se presenta una figura sólida que no es coherente con los planos desarrollados en Matlab. No se seleccionan materiales adecuados para reproducir la figura real. El área superficial de la figura supera en una cantidad significativa el área de la hoja en la que el plano fue representado. Esto demuestra que hubo superposición de áreas.	Se presenta una figura sólida y coherente con los planos desarrollados en Matlab. Sin embargo, no representa con exactitud la figura original. Se seleccionan materiales adecuados para reproducir la figura real. Sin embargo, su utilización y manipulación demuestran falta de calidad y presentación El área superficial de la figura supera el área de la hoja en la que el plano fue representado. Esto demuestra que hubo superposición de áreas.	Se presenta una figura con una estructura sólida y coherente con los planos desarrollados en Matlab. Se utilizan materiales adecuados y la presentación física de la figura es acorde al modelo real. Se demuestra que el área superficial de la figura no supera el área de la hoja en la que el plano fue representado.
Exposición		
0.0 a 1.9	**2.0 a 3.9**	**4.0 a 5.0**
No presentan un video que resumen el proceso para el desarrollo de la actividad. No presentan el artículo tipo escrito científico de acuerdo a las normas APA.	Presentan un video donde describen el proceso para el desarrollo de la actividad, teniendo en cuenta los aciertos y las dificultades. Sin embargo, se nota improvisación y una edición de mediana calidad. Sistematizan la información en un artículo tipo escrito científico de acuerdo a las normas APA, pero presentan dificultades en la redacción y argumentación de las ideas presentadas	Presentan un video donde describen de manera coherente y articulada el proceso para el desarrollo de la actividad, teniendo en cuenta los aciertos y las dificultades. Sistematizan la información en un artículo tipo escrito científico de acuerdo a las normas APA, con coherencia y buena redacción.

Fuente: Los autores

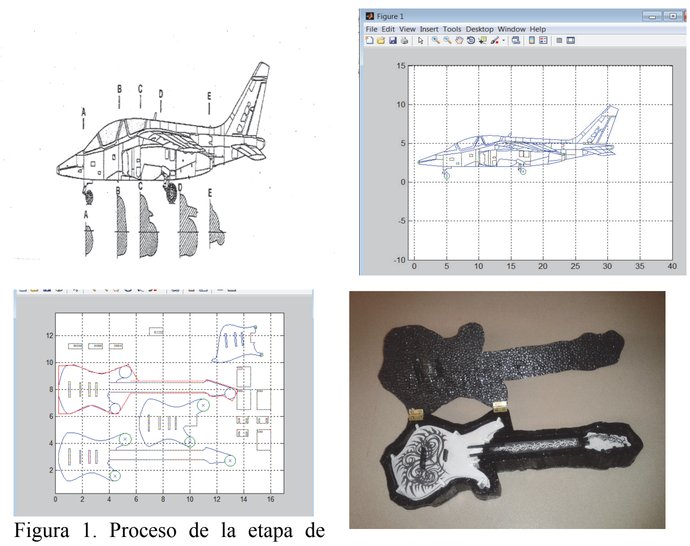

Figura 1. Proceso de la etapa de sensibilización.
Fuente: Los autores

En la Fig. 1 puede observase cómo a partir de la foto de un avión (entregada a un grupo de estudiantes de ingeniería aeronáutica en el curso de “matemática básica”), su posterior cuadrícula en papel milimetrado y la elección de coordenadas pertinentes para la digitación de las funciones, usando los comandos correspondientes en el programa Matlab, permitieron la construcción de una réplica exacta de la propuesta inicial. A continuación se presenta, la plantilla bidimensional de una guitarra construida en Matlab y la guitarra tridimensional. Al finalizar la etapa de sensibilización, los estudiantes comprendieron en un contexto real la importancia de conceptos como dominio y rango y su correlación con los comandos *linspace* y *axis*, respectivamente, en el programa Matlab. Otro aspecto relevante se encuentra en el tránsito de la representación gráfica y su correspondiente ecuación. Así mismo se encuentra, en plano de Matlab el trazo de las tangentes lo que al final permitió armar la caja para guardar la guitarra. Un dato relevante, fue el hecho de que algunos estudiantes, gracias a este proyecto comprendieron que la recta vertical está relacionado con la no existencia de la pendiente y que por tanto la forma de digitarlo en Matlab es diferente a la opción de los otros tres casos (pendiente cero, positiva o negativa).

En la etapa de *implementación de la modelación matemática*, se diseñó una actividad en la que la creatividad, fue un detalle importante, dado que cada grupo de estudiantes, al enfrentarse a la construcción de la figura de su foto, debía imaginarse la figura descompuesta en piezas bidimensionales, como se observa en la Fig. 2

A partir de la plantilla cuadriculada en papel milimetrado se planteó la tarea, que consistió en usar las diferentes funciones para modelar la forma de cada una de las piezas del plano y luego al introducir las funciones en Matlab se produjo el plano de la figura izquierda. Esta actividad permitió a los estudiantes, comprender la importancia de la continuidad de una función, del dominio, del rango, así como diferenciar entre función y relación. Al lado derecho encontramos la figura ensamblada a partir del plano generado en el programa Matlab.

En la Fig. 3 se encuentra el procedimiento utilizado por un grupo para encontrar la ecuación de una parábola, los comandos necesario para graficar una circunferencia en coordenadas cartesianas en el programa Matlab y un extracto de cómo los estudiantes encontraron el área de una parte del plano elaborado.

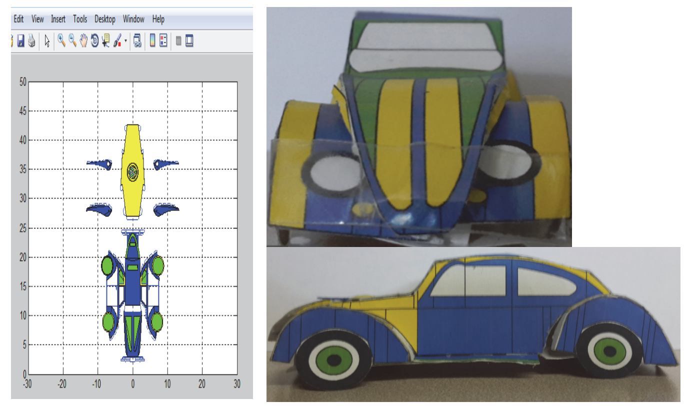

Figura 2. Plano en papel de la figura
Fuente: Los autores

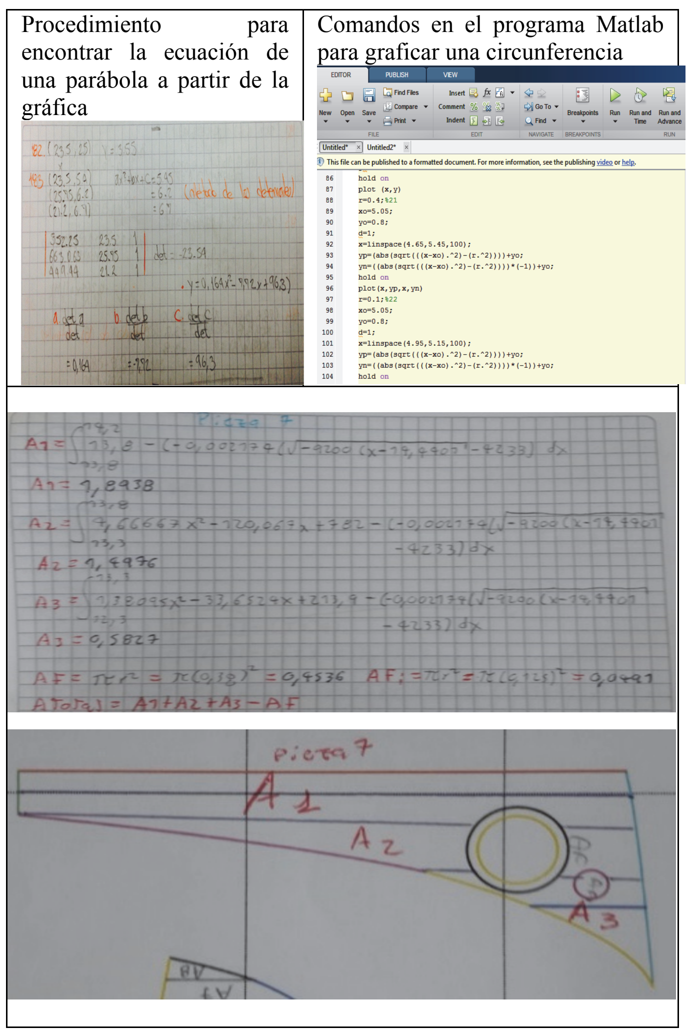

Figura 3. Procedimientos
Fuente: Los autores

En esta tarea los estudiantes tuvieron la oportunidad de moverse por las diferentes representaciones de la función, así mismo reforzaron el manejo de expresiones algebraicas, el concepto de pendiente y la resolución de sistemas de ecuaciones usando diferentes métodos, incluyendo la resolución usando herramientas tecnológicas. El resultado de este arduo trabajo, conllevó a la verificación de los procedimientos cuando, los grupos de estudiantes, introdujeron las funciones encontradas en el programa Matlab, esto implicó un manejo de los comandos propios del programa que correspondieran con los conceptos propios de la matemática. El hecho de que el programa exija explicitar las operaciones y la utilización de un punto siempre antes de cada operación para indicar que la variable independiente toma valores de un conjunto de números (llamado *linspace*), son elementos que ayudan a fortalecer conceptos en los estudiantes. Así mismo, el programa ofrece otros beneficios como la claridad de las operaciones, el uso de los paréntesis, decisión de cuando es mejor usar la función inversa, las ventajas y desventajas de parametrizar una función, por ejemplo, es más fácil parametrizar la circunferencia para digitarla en Matlab, todas estas conclusiones fueron a las que llegaron los estudiantes cuando se acercaron a los detalles del uso del programa. Al final, algunos grupos le indicaron y sugirieron a otros, posibilidades más eficientes del uso del programa, en muchos casos los estudiantes presentaron soluciones más interesantes que las propuestas por los docentes. El hecho de que algunas partes del plano, no eran figuras "tradicionales" de las que se conoce la fórmula para hallar el área, implicó que los estudiantes usaran el concepto de la integral definida para encontrarla.

5. Conclusiones

La investigación planteada ha querido mostrar que, aunque es una realidad la dificultad de instaurar un nuevo método de enseñanza aprendizaje, se hace necesario e importante tomar como punto de partida el contexto, es decir, los modelos que se encuentran en la realidad, para la formación de los ingenieros. Así, el desarrollo del proyecto permitió el inicio de un cambio en la perspectiva tanto de los profesores como de los estudiantes en la formación matemática de los futuros ingenieros. Ahora bien, tal cambio debe ser gradual y esencialmente debe tomar como referencia el contenido programático de los cursos, en nuestro caso, de Ciencias Básicas.

Involucrar a los estudiantes en "experimentos pedagógicos", con tareas enfocadas hacia la modelación matemática, les brinda la posibilidad de poner en juego todas las competencias propias de la matemática y a buscar estrategias para la resolución de problemas propuestos. Aproximarse a los contenido programáticos a partir de modelos, bien sean unos ya existentes u otros propuestos por los docentes (más aún se espera llegar a que sean los mismos estudiantes los que proponen los modelos que quieren resolver), abre una nueva dimensión al proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Encontramos, también, que la modelación matemática acerca de una manera mucho más efectiva a los estudiantes de primeros semestres de ingeniería con aquellas realidades particulares de su quehacer profesional, más aún, esta metodología evidencia las bondades del trabajo colaborativo y permite una formación, no sólo teórica del estudiante de ingeniería sino formativa, en el sentido que lo hace desarrollar habilidades matemáticas, sociales y comunicativas.

Sin embargo, se percibe que esta metodología debe estar acompañada de una disposición y apropiación por parte de los estudiantes hacia el trabajo y hacia el conocimiento de los conceptos matemáticos. En algunas fases de la modelación, nos encontramos con dificultes en cuanto a la comprensión, apropiación y aplicación de área bajo la curva y su relación con la integral definida. Así mismo, se presentó en algunos grupos poco empoderamiento a la hora de diseñar, construir y presentar su proyecto. En este punto es importante ver que toda metodología de aprendizaje debe estar acompañada situaciones que permitan capturar de capturar el interés de los estudiantes para el desarrollo de toda práctica pedagógica.

En este mismo sentido, se evidencia la necesidad de más proyectos de investigación encaminados a la renovación de las metodologías de enseñanza-aprendizaje de las ciencias básicas para estudiantes de ingeniería, dado que la modelación matemática exige un cambio no sólo en las concepciones de los estudiantes sino de los mismos docentes de matemáticas. Por tanto, los resultados y conclusiones de este proyecto, no sólo serán evidentes en el 2020 como lo plantea Acofi, sino que en la práctica diaria será posible que los estudiantes mejoren su rendimiento académico y encuentren en la matemática un medio para dar respuesta a problemas propios de su campo disciplinar.

Referencias

[1] Camarena,G.P., A treinta años de la teoría educativa 'Matemática en el Contexto de las Ciencias' Patricia, Cuad. Investig. y Form. en Educ. Matemática, 10(7), pp. 183-193, 2013.

[2] Martínez, G. and Gaitán, M., Sistemas de creencias y rendimiento en matemática en estudiantes de ingeniería, pp. 2800-2811. 2013

[3] ACOFI, El ingeniero colombiano del año 2020. Retos para su formación. 2007.

[4] Justi, R., Learning how to model in science classroom: Key teacher's role in supporting the development of students' modelling skills, Educ. Química, 20(1), pp. 32-40, 2009.

[5] Özdemir E. and Üzel, D., Student opinions on teaching based on mathematical modelling, Procedia - Soc. Behav. Sci., 55, pp. 1207-1214, 2012. DOI: 10.1016/j.sbspro.2012.09.616

[6] Blum,W., Mathematical modelling in mathematics education and instruction. In Breiteig, T., Huntley, I. and Kaiser-Messmer, G., (Eds.), Teaching and learning mathematics in context, Chichester, UK: Ellis Horwood. 1993, pp. 3-14.

[7] Blum, W. and Borromeo, R., Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?, J. Math. Model. Apl., 1(1), pp. 45-58, 2009.

[8] Blomhoj, M. and S. Carreira, Eds., Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics, no. 461, 2009, 248 P.

[9] Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G. and Lozano, M.D., Use of models in the teaching of linear algebra, Linear Algebra Appl., 432(8), pp. 2125-2140, 2010. DOI: 10.1016/j.laa.2009.05.004

[10] Biembengut, M.S. and Hein, N., Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática, 16, pp. 105-125, 2004.

[11] Stewart, J., Cálculo. Conceptos y contextos, 4ta Edición. Cengage Learning, 2010.

[12] Morales, Z.E., Transformando las representaciones semióticas: Un enfoque cognitivo en el estudio del álgebra, Acta Latinoam. Matemática Educ. 26, pp. 673-678, 2013.

[13] González, M. y Sierra, A., Metodología de análisis de libros de texto, Enseñanza las Ciencias, 22, pp. 389-408, 2004.

[14] Bassanezi, M. y Biembengut,R., Modelación matemática: Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza, Rev. Didáctica las Matemáticas, 32, pp. 13-25, 1997.

[15] Sofronas, K.S., DeFranco, T.C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L. and Hamelin, C., What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts, J. Math. Behav., 30(2), pp. 131-148, 2011. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.02.001

[16] Blum, W., Mathematical modelling: Can it be taught and learnt ?, 1(1), pp. 45-58, 2009.

L.M. Peña-Páez, recibió el título de Licenciada en Matemáticas en 2002 de la Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia; el título de Esp. en Matemática Aplicada en 2006 de la Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia y el título de MSc. en Filosofía en 2012 de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia. Es docente investigadora de la universidad de San Buenaventura, Bogotá, Colombia.
ORCID: 0000-0001-9472-1375

J.F. Morales-García, recibe el título Licenciado en Matemáticas de la universidad Distrital, Bogotá, Colombia, el título de MSc en Educación de la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia. Es docente investigador de la Universidad de San Buenaventura, Bogotá, Colombia. Actualmente docente de la Universidad Manuela Beltrán, Bogotá, Colombia
ORCID: 0000-0003-4752-7101